

統計製程管制

楊素芬 特聘教授

Distinguished Prof. Su-fen Yang

Department of Statistics

National Chengchi University

Taipei, 116, Taiwan, ROC

1. 統計學的意義

問題---資料收集-- -資料整理與解釋-- -資料分析--- 資訊獲得---決策

(sample or population)

(for samples)

- DOE Figure, Table Statistical Inference Quality Problem
- Process Shape of Distri. Regression Analysis Problem Solving
- Questionnaire Central Tendency ANOVA(因果關係) Decision Making
- Dispersion
- (To know property of population)

Ex: 欲了解產品特定品質特性(X)之製程能力

已知製程穩定下-----收集約30個樣本組-----次數分配圖、表
 ----- Shape of Distri. , Central Tendency($\bar{x}$) , Dispersion(s^2)-----推論
 μ, σ , 計算Ca, Cp, Cpk ----- 製程能力需改進?

2.

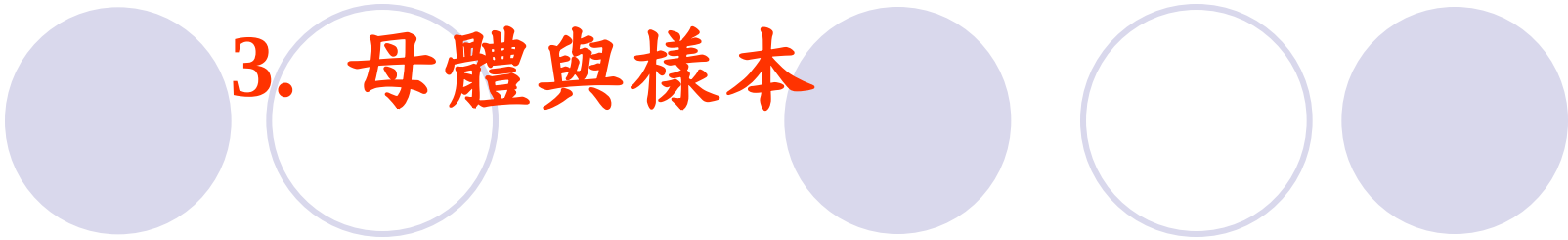
資料種類與來源

● 2.1 資料種類

- (1)文字資料： 意見或問題…等以文字表達
- (2)類別資料 (or 屬性資料)： 職業別，滿意度，性別
- (3)計數值 (discrete data or attribute data):
 - 不合格數，缺點數，…
- (4)計量值 (variable data or continuous data):
 - 長度，強度…

2.2 資料來源

- 初級資料：由實驗或問卷調查或觀察收集到的資料
● （科技，醫，農，生，化）
- 次級資料：得到的資料乃經由他人或機關收集及整
● 理過的，如：行政院主計處的家庭所得調
● 查報告，施政滿意度調查報告....
● （人文社會，衛生署）



3. 母體與樣本

- 3.1 母體(population):

- 有興趣的個體(or 對象)之所有觀測值所形成之集合

- EX: 一盒子內螺絲長度之全部測定值所形成之集合

- EX: 全校員工之薪水所形成之集合

- EX: 全校同學之身高所形成之集合

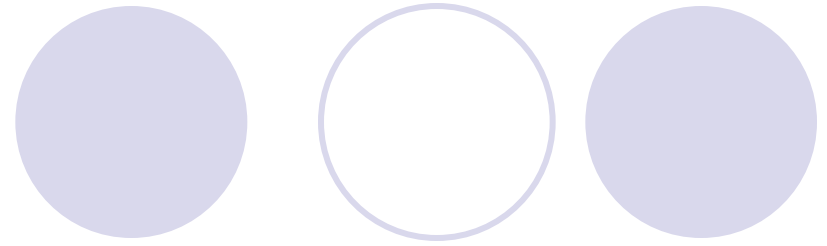
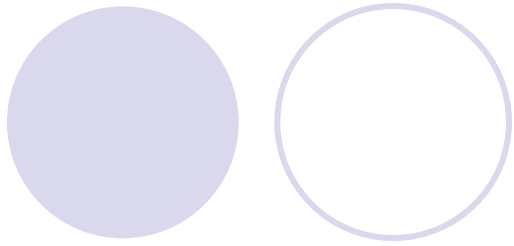
參數(parameter):

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}, \quad \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N}$$

3.2 樣本(sample): 母體之一部份

EX: 公司隨機抽出10個螺絲其長度測定值所形成之集合

- EX: 全公司抽取120員工之薪水所形成之集合
- EX: 全校抽取1000同學, 其身高所形成之集合

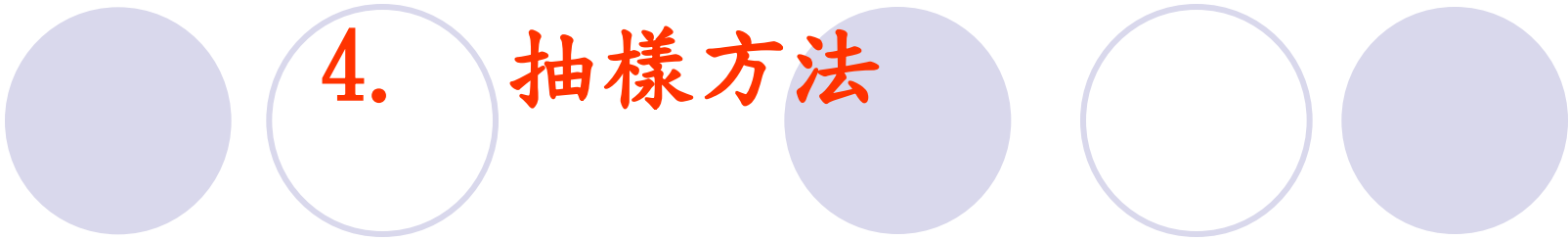


統計量(statistic):

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

Random Variable



4. 抽樣方法

4.1 普查

- 缺點：費時，費力，成本高，人為錯誤

- 優點：可得母體資料，結果可能較可靠

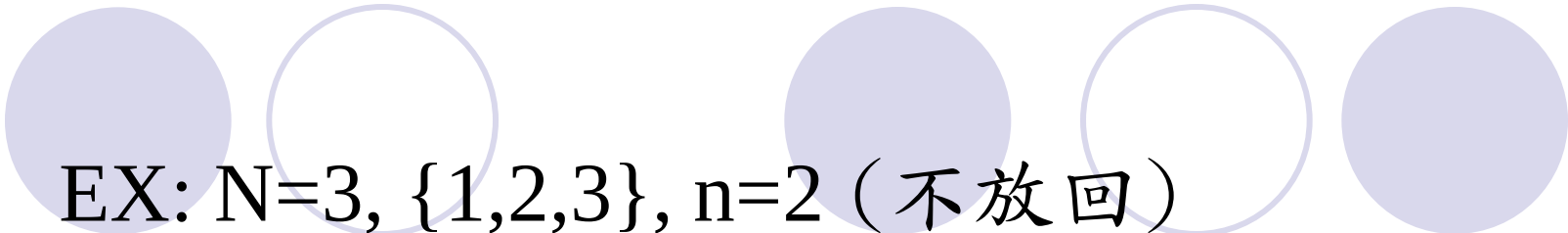
4.2 抽樣調查

- 缺點：若樣本不具母體代表性推論，結果較不可靠

- 優點：省時，省力，成本低

4.3 抽樣方法：

- 簡單隨機抽樣(Simple random sampling):
- 假設母體中全體元素能編列成抽樣名冊，元素個數為 N ，由其中隨機抽 n 個元素形成隨機樣本，而每一組可能的隨機樣本都有相同被抽中的機會，此種抽樣方法稱為簡單隨機抽樣。



EX: $N=3$, $\{1,2,3\}$, $n=2$ (不放回)

<sol> 可能的樣本組數=3, 分別為
(1,2),(1,3),(2,3)

每一組可能的隨機樣本被抽中的機會=1/3.

(note, a random sample, $X_1, X_2, \dots, X_n \sim \text{iid}$)

分層隨機抽樣(Stratified Random Sampling)

- 將母體依某特性分成數個互斥的層別，然後就各層別分別進行簡單隨機抽樣，此種抽樣方法稱為分層隨機抽樣。
- Note: 層間差異大, 層內差異小

EX: 全公司有2000位員工，依部門人數比例共抽取20人代表公司出國考察，則應如何抽樣？

● <sol>

● 各部門為層別

● 設部門1，500位，佔公司人數比例0.25

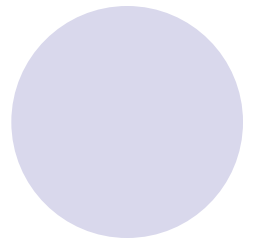
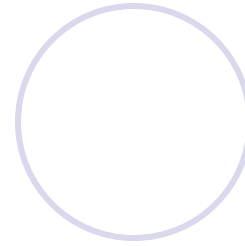
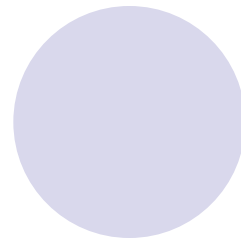
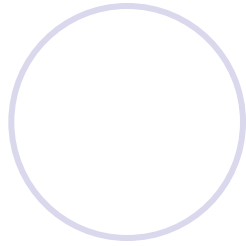
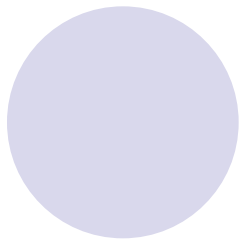
● 部門2，1000位，佔公司人數比例0.50

● 部門3，500位，佔公司人數比例 0.25，

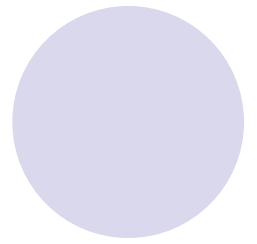
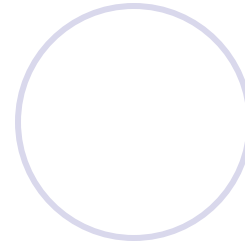
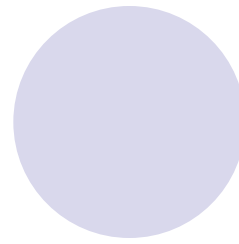
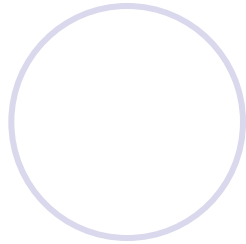
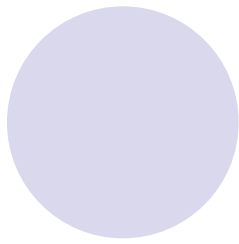
● 則部門1，應用簡單隨機抽樣法抽取5位

● 部門2，應用簡單隨機抽樣法抽取10位

● 部門3，應用簡單隨機抽樣法抽取5位



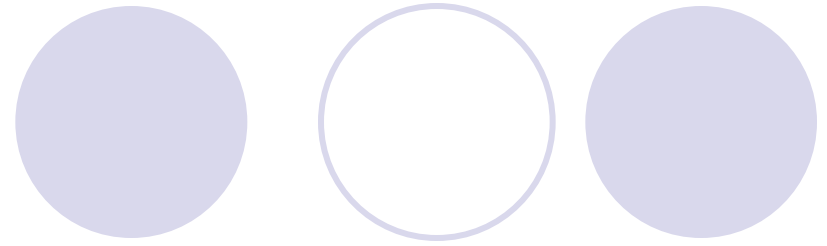
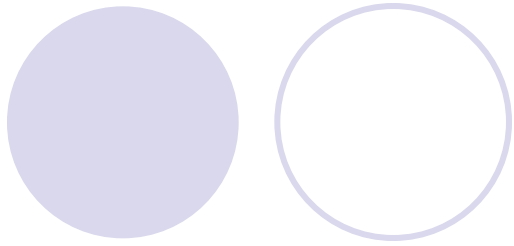
- EX: 全公司有2000位員工，依性別人數比例共抽取20人代表公司出國考察，則應如何抽樣？已知男性1500人，女性500人.
- <sol>



- EX: 已知公司某原料來自3個供應商 (40%, 35%, 25%)，欲知公司該原料之不良情形，則應如何抽樣？
- <sol>

- 系統抽樣(Systematic Sampling):

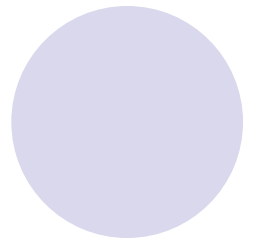
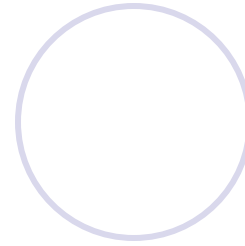
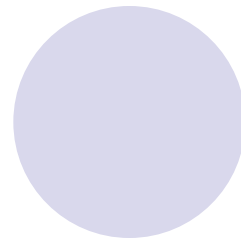
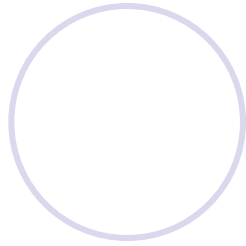
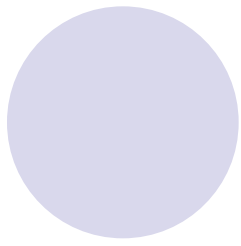
- 將母體之 N 元素以某特性排序, 再依樣本大小(n)將 N 元素分成 N/n 個組, 每組各有 r 個元素。
- 以簡單隨機抽樣法由1至 r 中抽取一個隨機亂數, 令其為序號 k , 則其他組之第 k 個元素都被取出形成一個樣本組。



- EX: 由含100個號碼(元素)之母體以系統抽樣法抽取10個($n=10$),則此樣本組為何?
- <sol>
- 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,...,21,22,...,31,32,...,91,92,...,100,

部落抽樣(Cluster sampling)

- 將母體分成 k 個部落並予編號，再以簡單隨機抽樣法自 k 個部落抽取 r 個部落並就其全部元素進行調查。
- Note: 部落內差異大，部落間差異小
- 優點: 不必有母體全部元素之名冊



- EX: 對台北市學童蛀牙(或家戶年所得)情形
- 做調查, 則以行政區為部落, 抽取三區, 再
- 以學校為部落抽取4學校, 再以學校為部落
- 抽取10班級進行全檢



5. 資料整體與解釋

- 乳牛吃草(input)-----牛乳(output)

-
- 統計方法要有數據---訊息.

5.1 discrete and continuous data

(1) discrete data (計數值資料---attribute data):

- EX: 缺點數，不合格數，受傷人數，意外事件數..



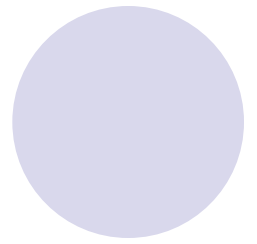
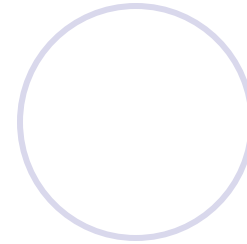
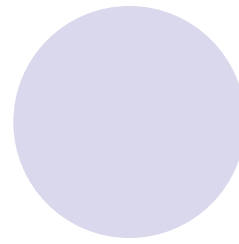
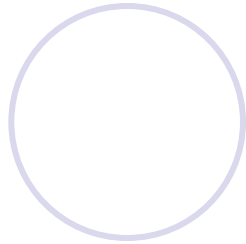
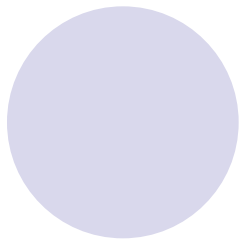
● (2) continuous data (計量值資料---variable data):

- EX: 強度，身高，重量，收入，股價....

5.2 直方圖(histogram)的建立

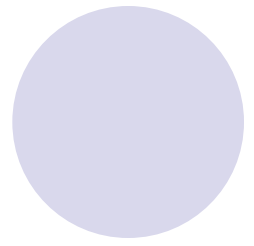
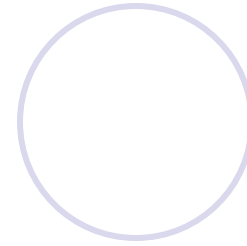
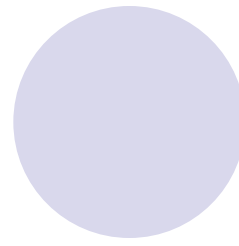
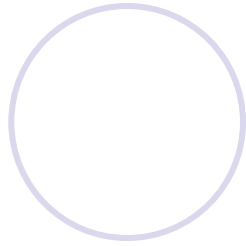
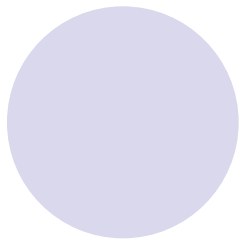
了解數據之分配

- 直方圖的應用非常廣泛。
- 直方圖的製作方法介紹如下：
 - (1)依資料個數決定分組數, 分組數 $k = (2 * \text{資料個數})^{0.3333}$
 - (2)將數據排序,計算全距, ex: $R = 4.7 - 1.6 = 3.1$ 。
 - (3) 將數據分 $k (=7)$ 組。
 - (4) 組距, 為方便分組取組距 $= R/k = 3.1/7 = 0.44$, 取 0.5 。
 - (5) 以 $1.45 (< \text{最小值})$ 為第一組之下界, 則 $1.45 + 0.5 = 1.95$
為第一組之上界, 於是決定各組界。
 - (6) 次數分配表:再統計各組發生的次數, 做成一個表。
 - (7) 根據此表, 可進一步做直方圖

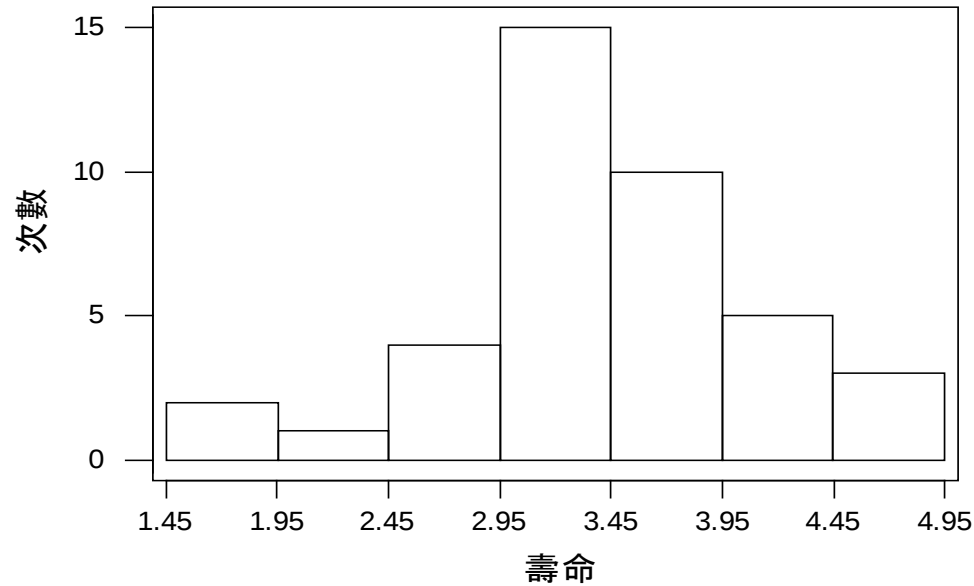


表：電池壽命的次數分配表

組界	組中點	次數	相對次數	累積相對次數
1.45-1.95	1.7	2	0.050	0.050
1.95-2.45	2.2	1	0.025	0.075
2.45-2.95	2.7	4	0.100	0.175
2.95-3.45	3.2	15	0.375	0.550
3.45-3.95	3.7	10	0.250	0.800
3.95-4.45	4.2	5	0.125	0.925
4.45-4.95	4.7	3	0.075	1.000
合計		40	1.000	1.000



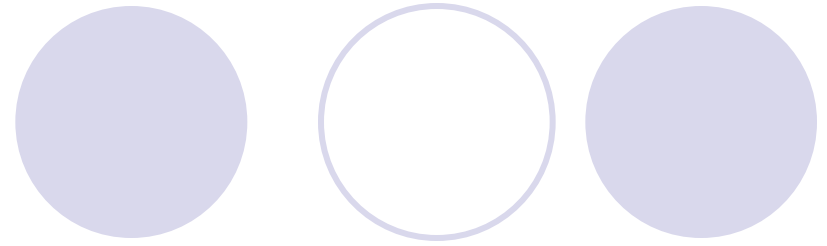
依數據多少決定組數及組距,再計算組距內次數



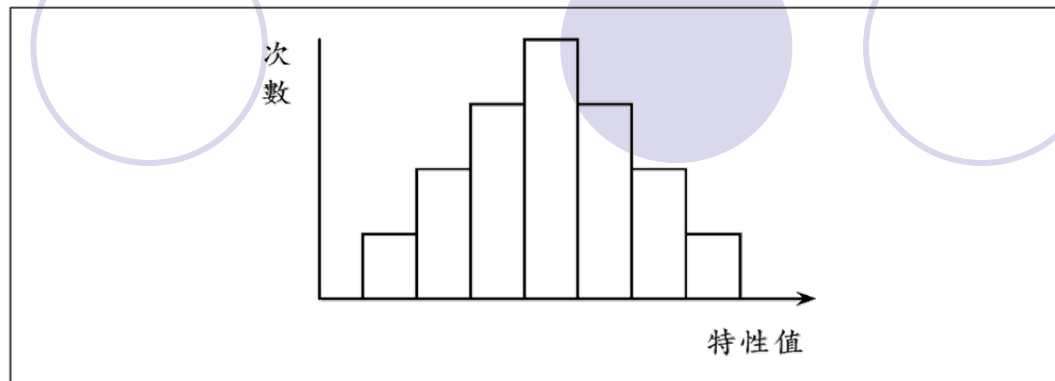
統計軟體

distribution

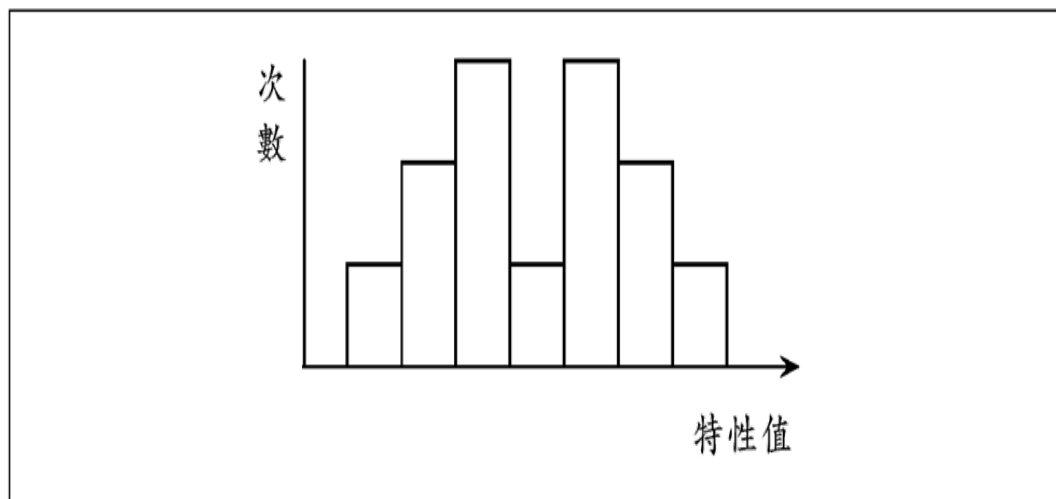
5.3 直方圖的應用



- (1) Shape of distribution , 集中趨勢, 離中趨勢
- EX: 全國國民所得之水準
普查國民薪資所得-----次數分配圖、表--- Shape of Distri

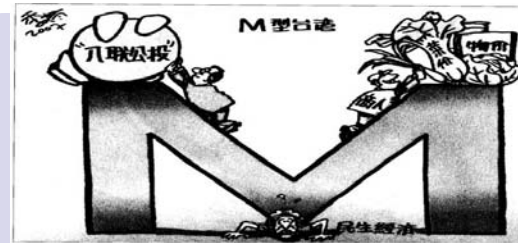


常態型直方圖



雙峰直方圖

M型社會



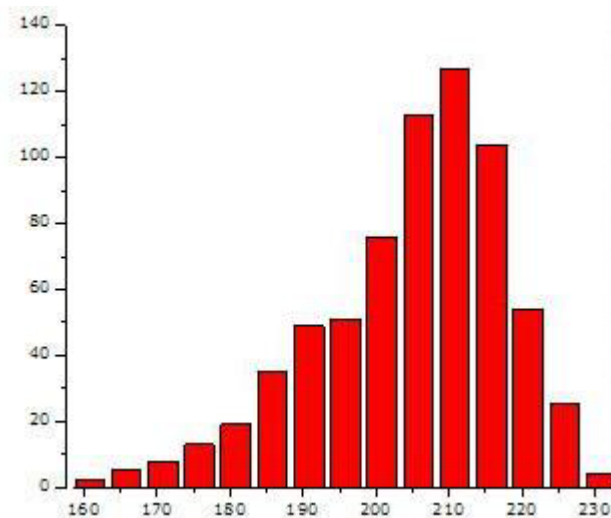
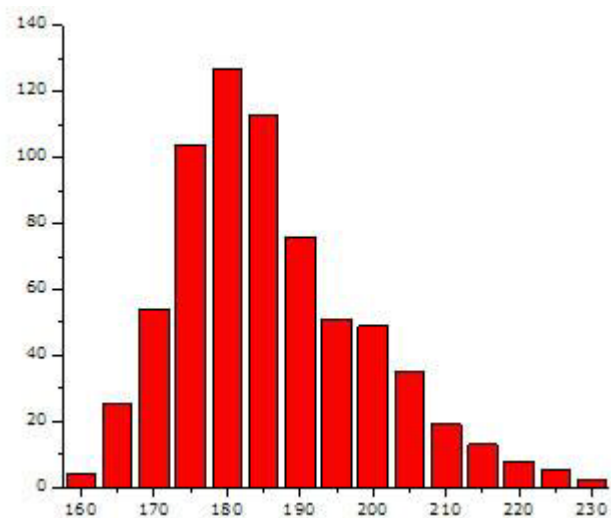
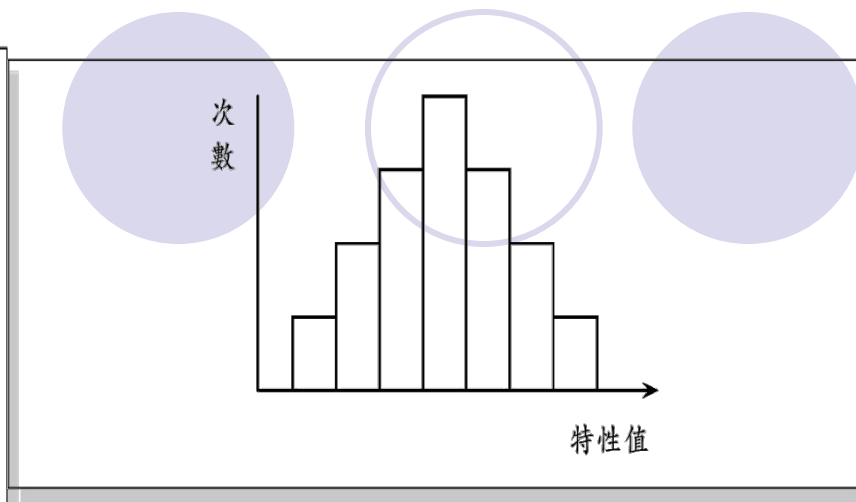
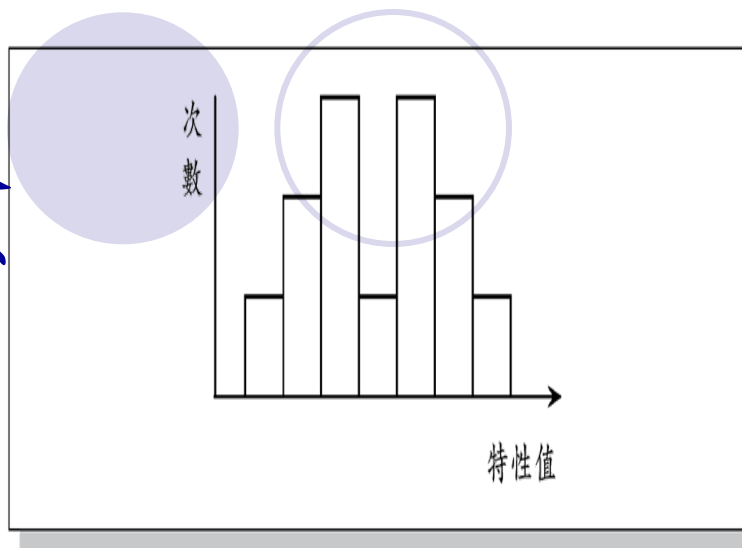
台灣國民薪資所得分配是多少個峰??

日本製, 德國製工具機產出零件之長度分配不同!!

數據合併後之分配為何?

實務上收集的data分配不一定是常態!! Why?

大目望望望

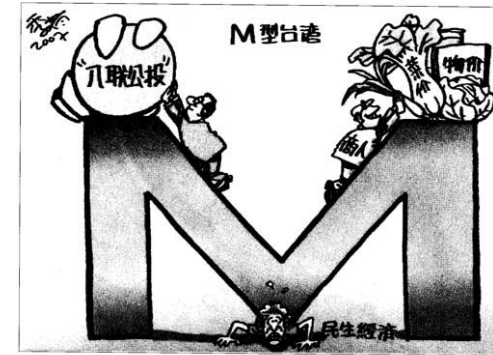


Central Tendency (μ) [所得水準=GDP]

- 2007---US\$16274(Taiwan), \$19624 (South Korea)
- 2010 \$18303 \$20165
- 2007---Tai---大學畢起薪NT\$26k, SK--NT\$71,000
- 2012 NT\$24,655
-
- 不同供應商提供一批5mm螺絲之好壞(準確度)

Dispersion (σ , range)[所得差異]

- 2008---台灣兒童貧富差距至少達19倍=range



原载台《联合报》2007年10月19日

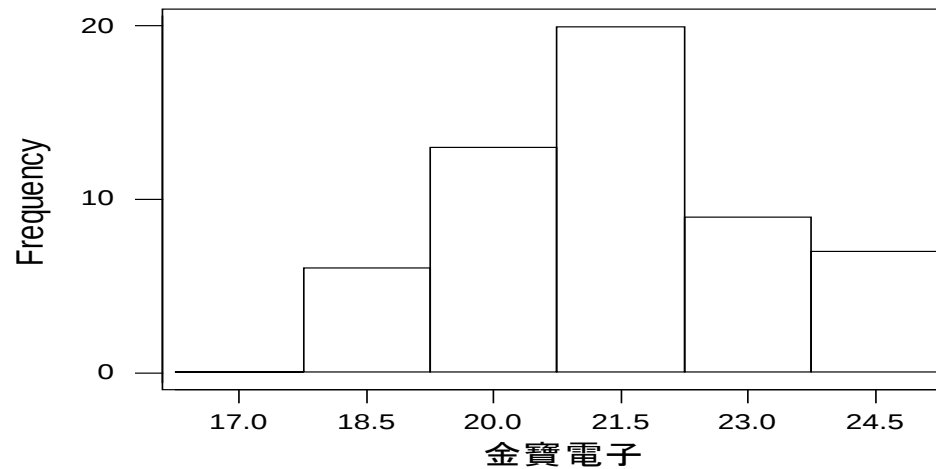
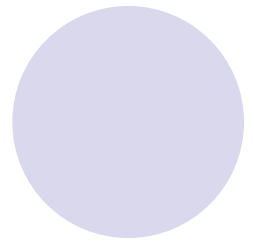
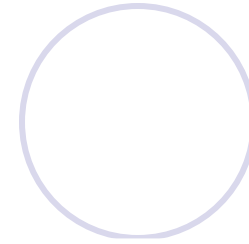
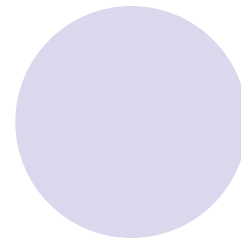
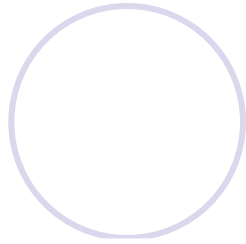
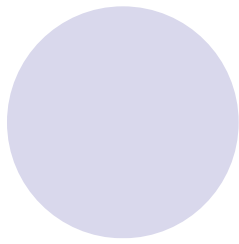
- 2007---大學畢起薪差距
- =NT\$40000-18000=NT\$22000=range
- (Range= $\sim 6\sigma$ ---- $\sigma=22000/6=3667$)
- 不同供應商提供5mm螺絲之整齊度(精密度)

(2)比較風險

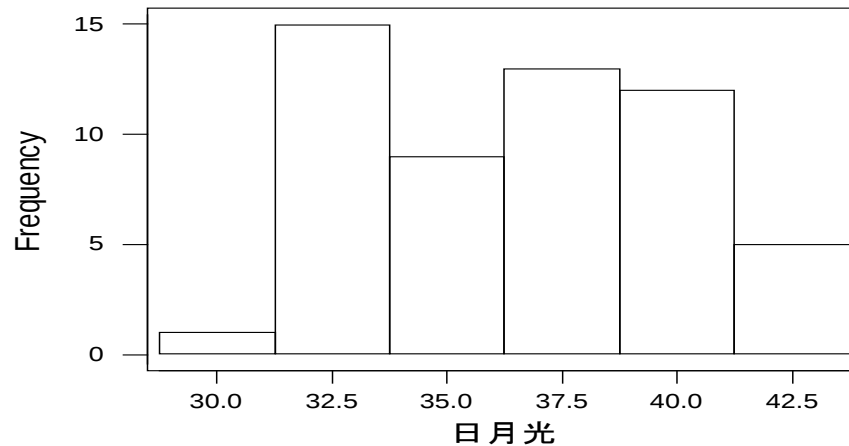
- EX: 欲比較兩上市公司股價變化之風險
收集近三個月之股價資料---次數分配圖、表

比較Shape of Distri., Central Tendency, Dispersion

● 那公司風險高？



- N1 Mean1 StDev1 Variance1 C.V.1=StDev1/Mean1
- 55 21.475 1.638 2.684 1.638/21.475=0.0763



- N2 Mean2 StDev2 Variance2 C.V.2=StDev2/Mean2
- 55 36.538 3.387 11.469 3.3867/36.538=0.0927

(3)比較5mm螺絲供應商品質之精密度

- A: Mean= 4.5 StDev=1.0 (準而不精)

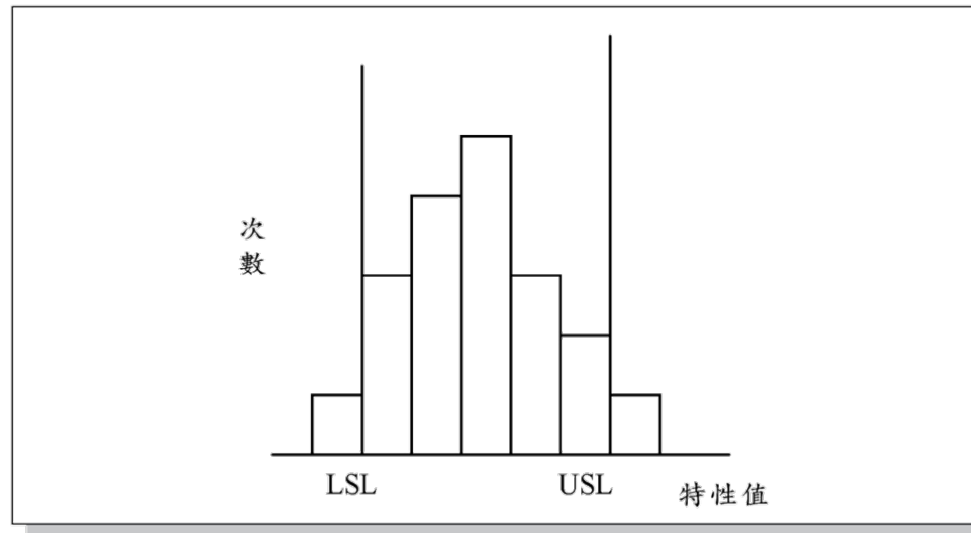


- B: Mean= 2.0 StDev=0.1 (精而不準)

$$CV(A)=1.0/4.5=22.22\% < CV(B)=0.5/2.0=5\%$$

(3) 計算製程(或流程)能力(process capability)

已知 USL, LSL

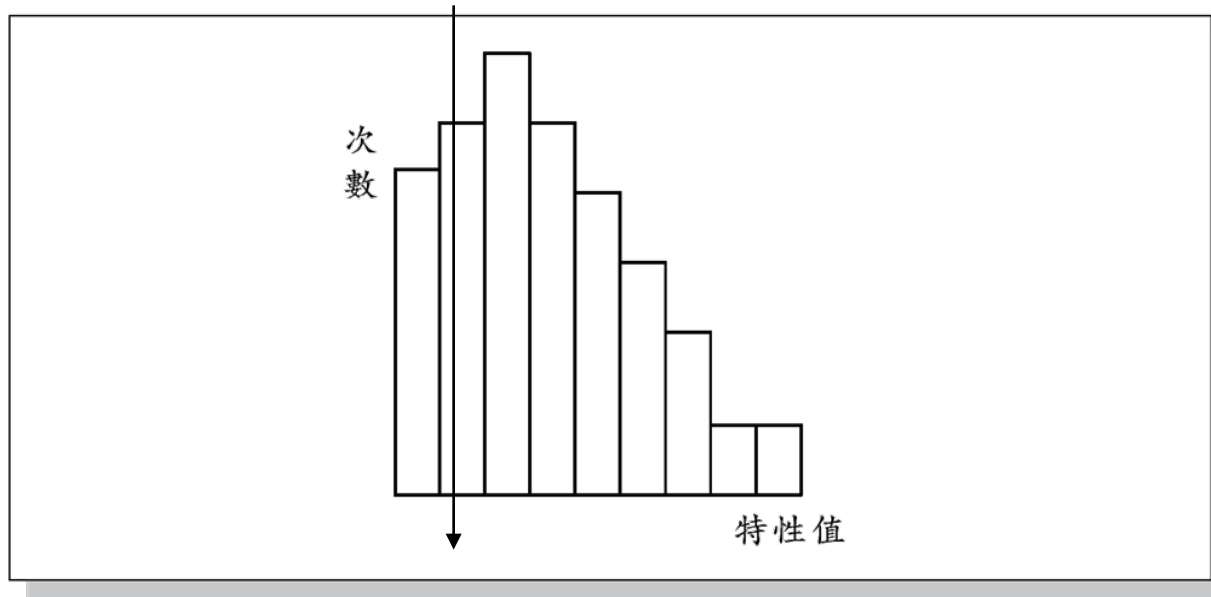


$$\text{不合格率} = P(X > USL, X < LSL)$$

不合格率 < 目標(or要求)-----能力好

不合格率 > 目標(or要求)-----能力不好

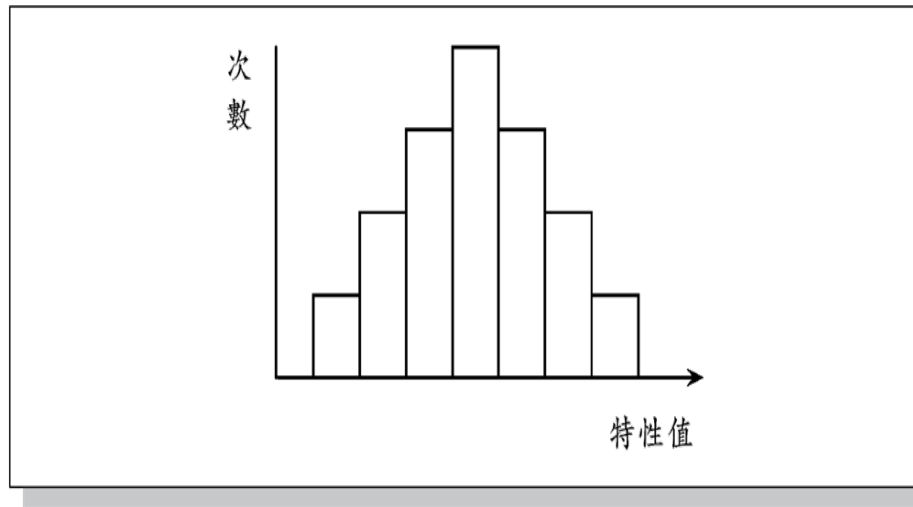
(3) 計算製程(或流程)能力(process capability)



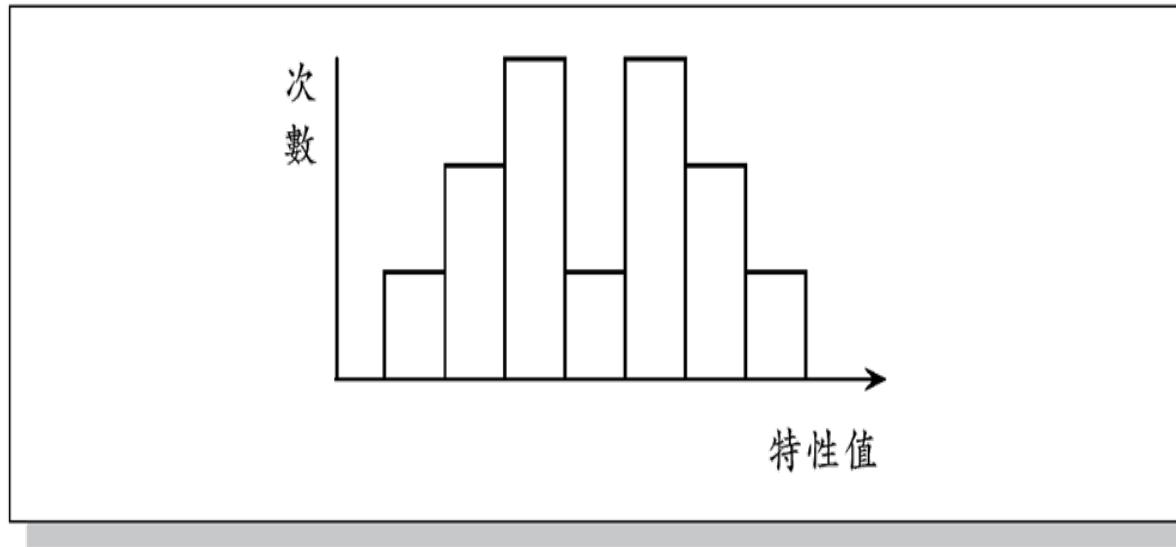
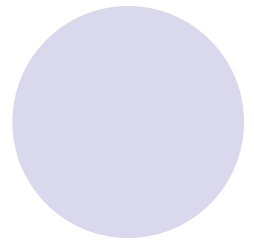
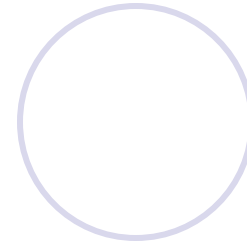
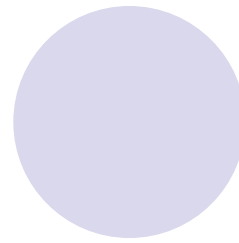
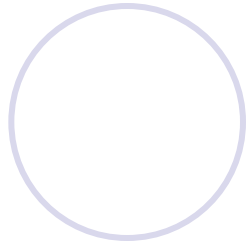
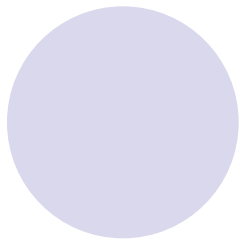
望大

$$\text{不合格率} = P(X < LSL)$$

5.4 直方圖不全是鐘型的



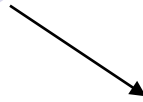
- 常態型直方圖——望目特性, 合理抽樣
- (a random sample, $X_1, X_2, \dots, X_n$ iid)



雙峰直方圖一望目，
大多是不合理抽樣

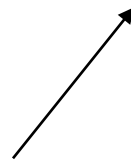
EX: 不合理的抽樣

machine A



output---sampling

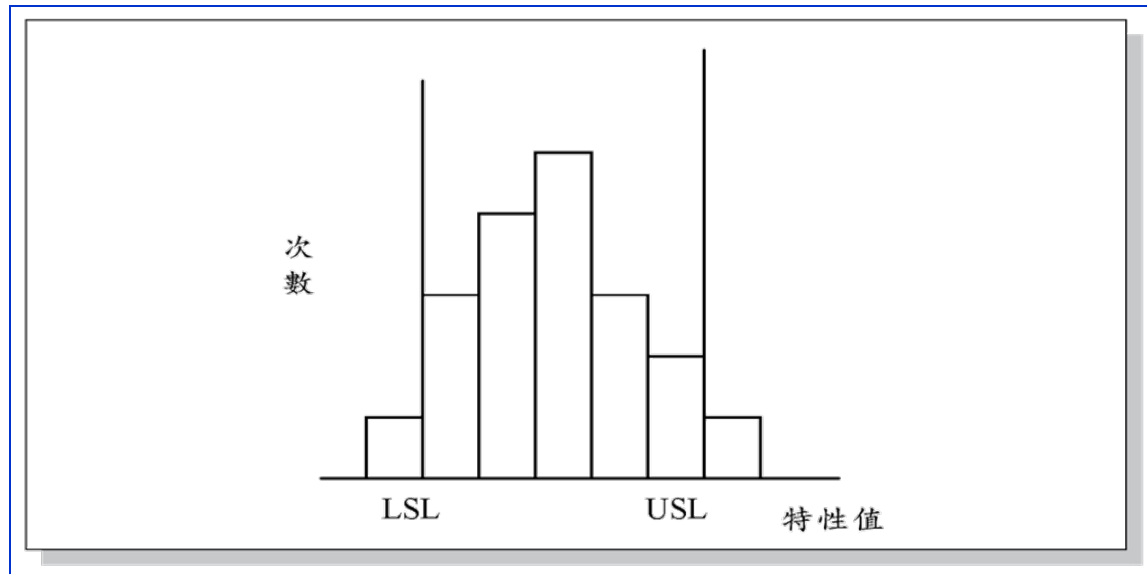
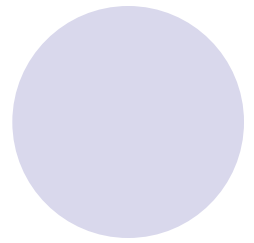
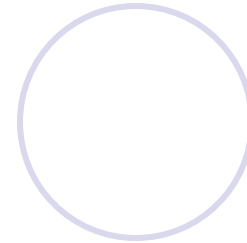
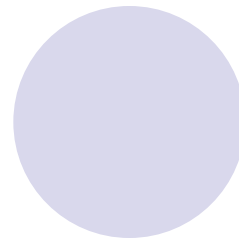
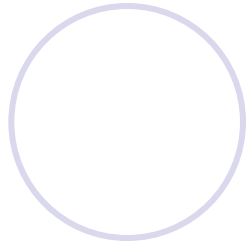
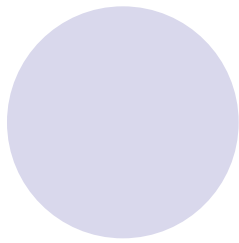
machine B



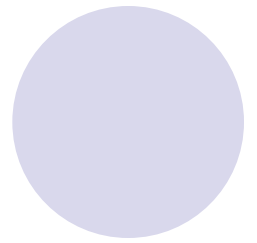
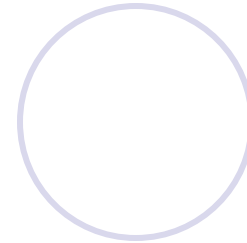
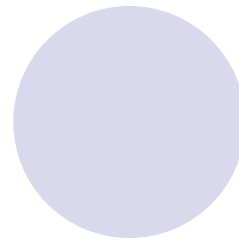
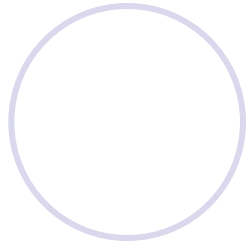
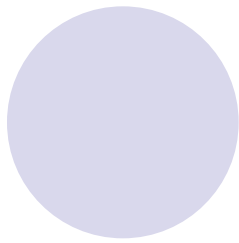
合理的抽樣

machine A → output A---sampling

machine B → output B---sampling



削壁型直方圖--望目, 全檢

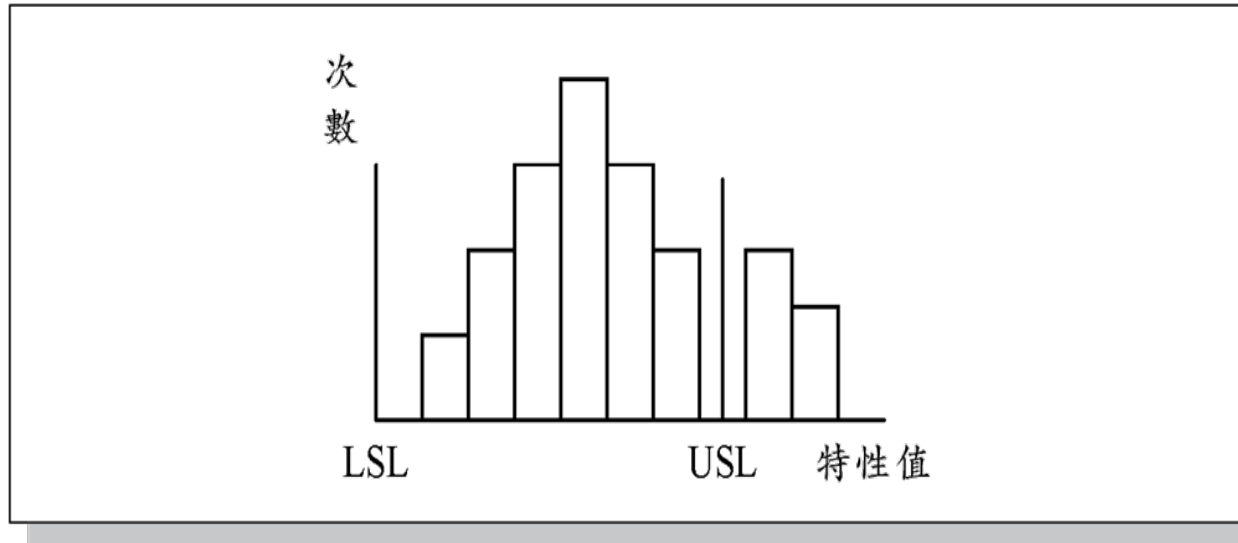
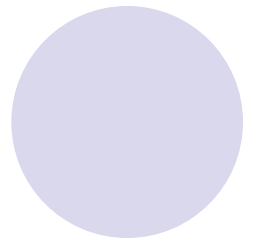
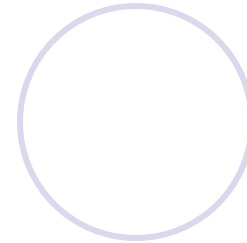
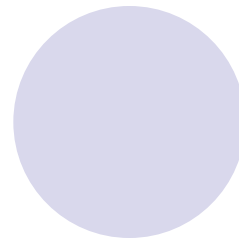
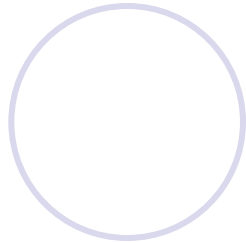
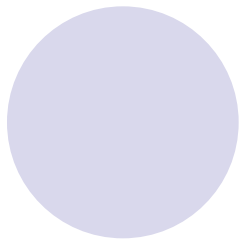


國中能力分班之分配？

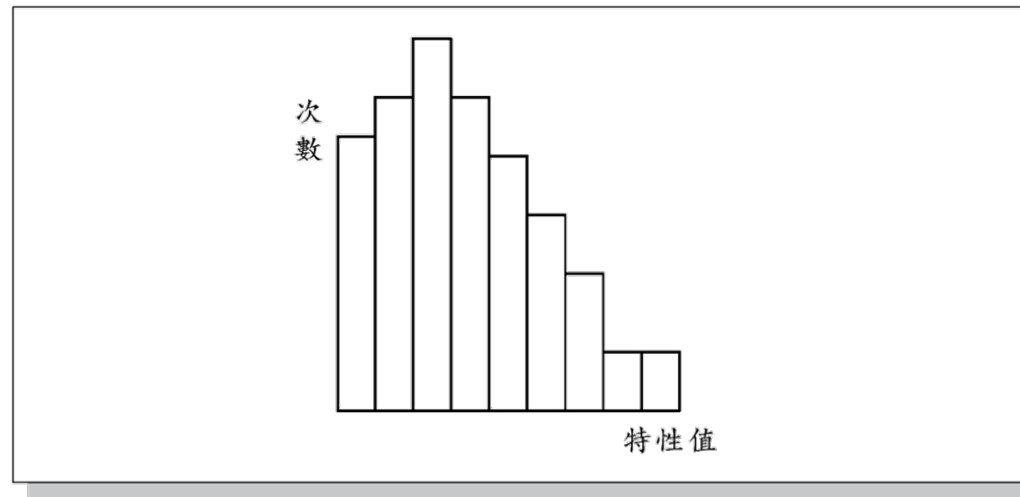
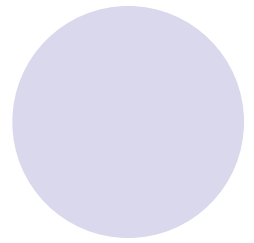
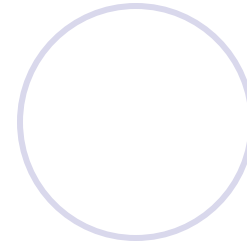
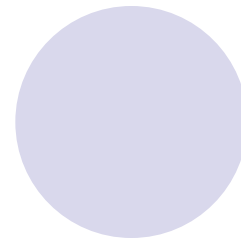
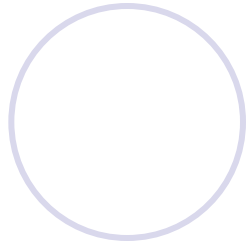
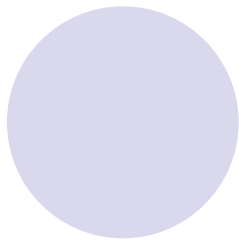
Let 能力=學業成績

放牛班 資優班

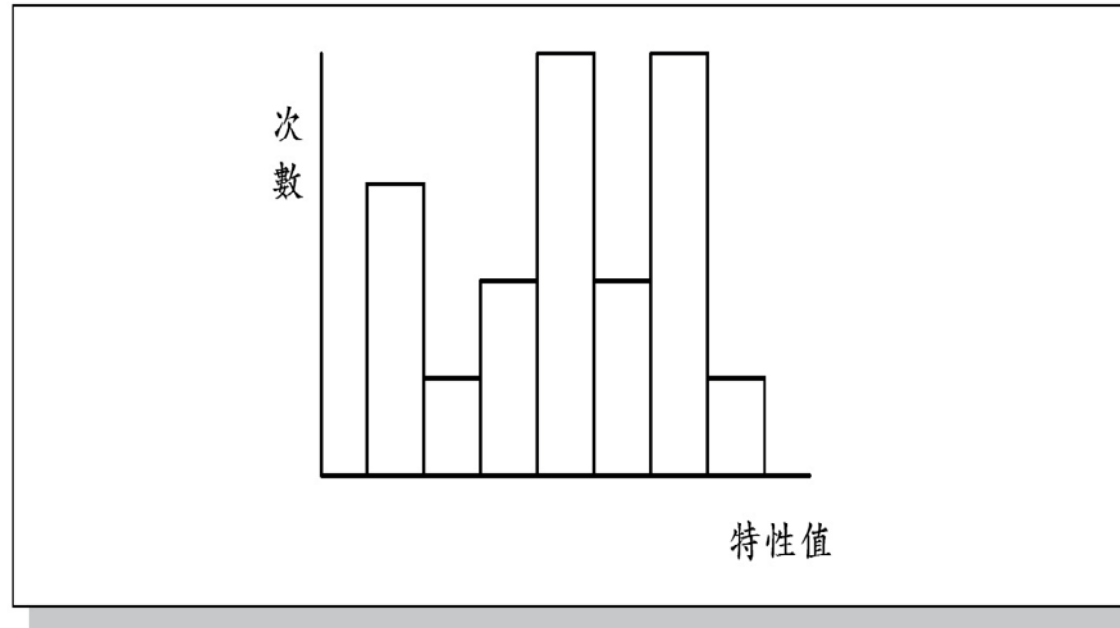
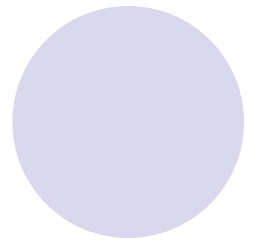
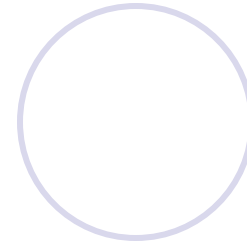
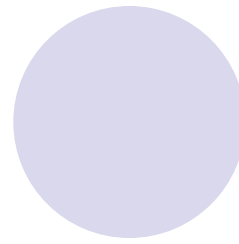
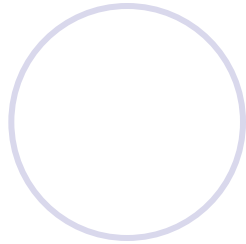
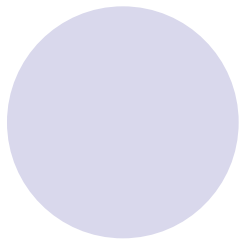
分配非常態



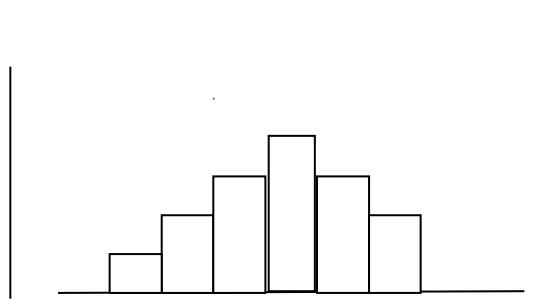
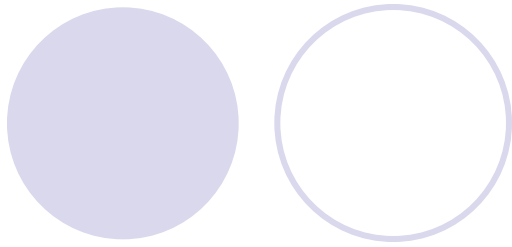
離島型直方圖--異常值
(望目or望小:品質不合格
望大:品質特優)



右偏分配--望大 or 望小



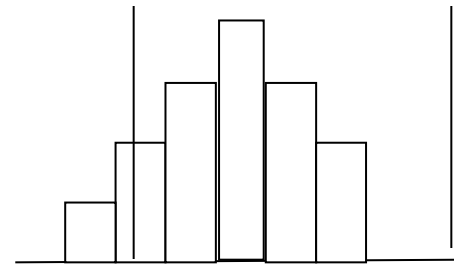
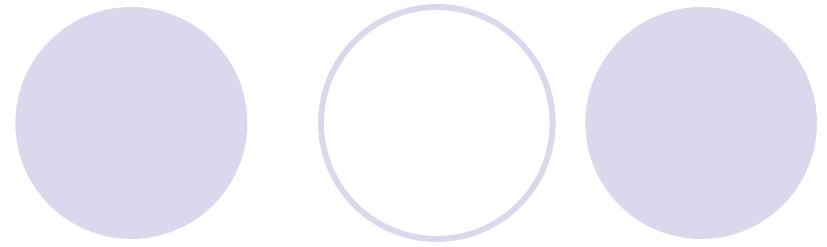
梳型直方圖--分組不當或量測值有誤差



LSL

USL

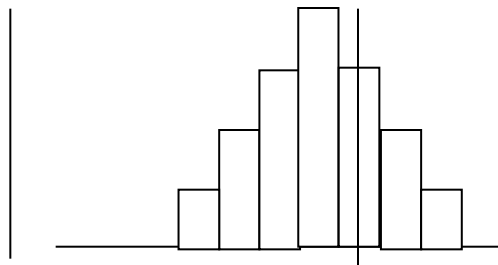
圖：製程能力較規格好得多



LSL

USL

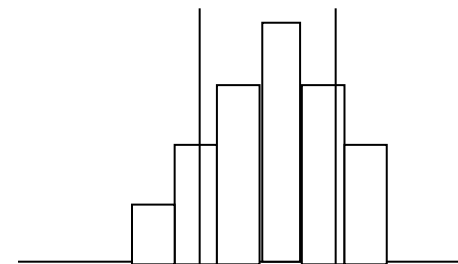
圖：中心偏左製程能力



LSL

USL

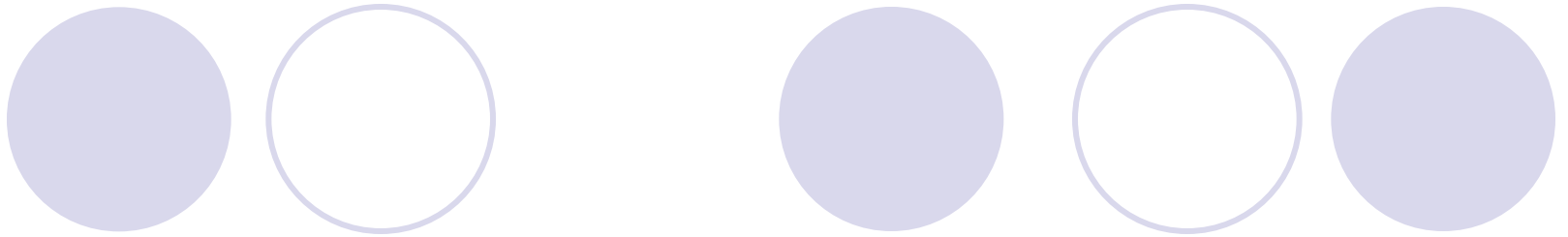
圖：中心偏右製程能力



LSL

USL

圖：分散度過大製程能力

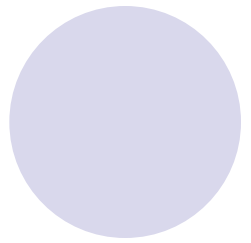
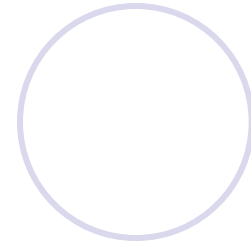
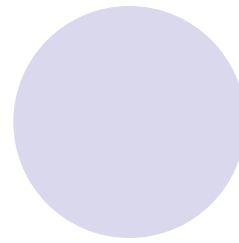
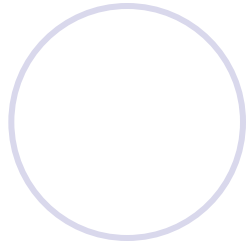
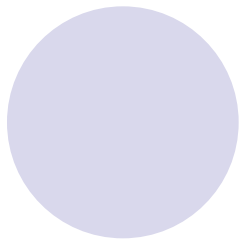


實務上不合理的抽樣情形常發生

EX: Samples come from 3 different groups of operators

- Samples come from different machines

- not a random sample, not iid obs



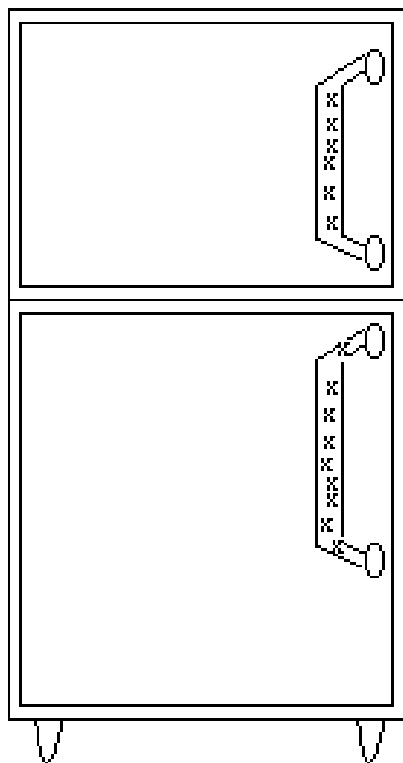
● 合理抽樣=a random sample

● $X_1, X_2, \dots, X_n \sim \text{iid}$

● works for Statistical inference or analysis

5.4 Checking Sheet 檢核圖(收集和統計數據)

- 檢核表是以圖或表呈現出問題所在的一種簡單方法。檢核表並無固定的格式，使用者可依問題的特性自己設計表或圖，並以簡單的符號填註，用以了解問題的現況，做分析或做檢核之用。



圖：電冰箱外觀之檢核表

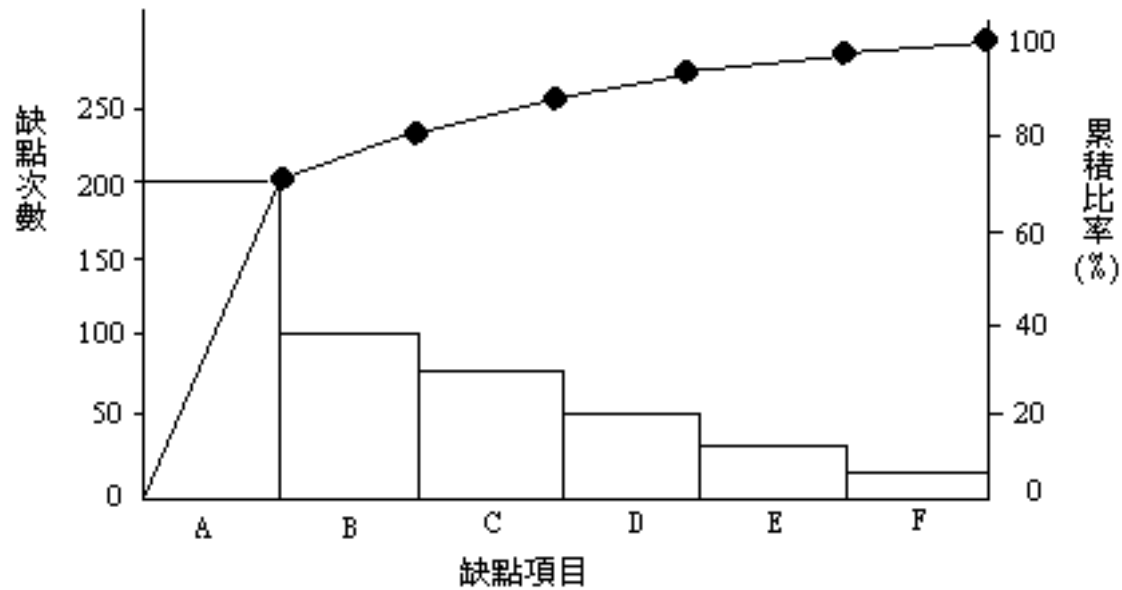
表：記錄用檢核表

作業員打字錯誤檢核表		
作業員	劃記	次數
01		2
02		3
03		1
04		19
05		0
06		2
07		1
08		3
09		17
10		2
總和		50

5.5 柏拉圖

- 柏拉圖首由義大利經濟學家Vilfredo Pareto提出，主要用在分析財富的分配上。1960年代，品管大師裘蘭（Juran）將柏拉圖應用在品管資料分析上。在品管活動中，柏拉圖通常用來區分造成品質問題的少數重要原因和多數不重要的原因。針對少數重要原因做改善，可以使品質有顯著的改進

柏拉圖通常依據記錄用檢核表上各項目的 統計次數繪製



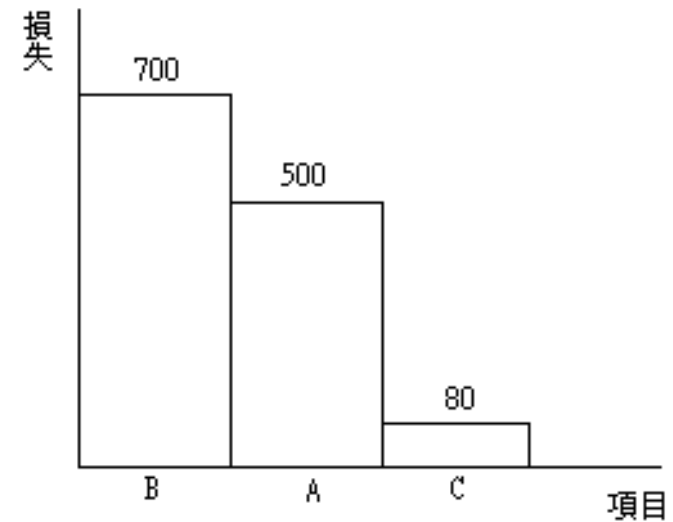
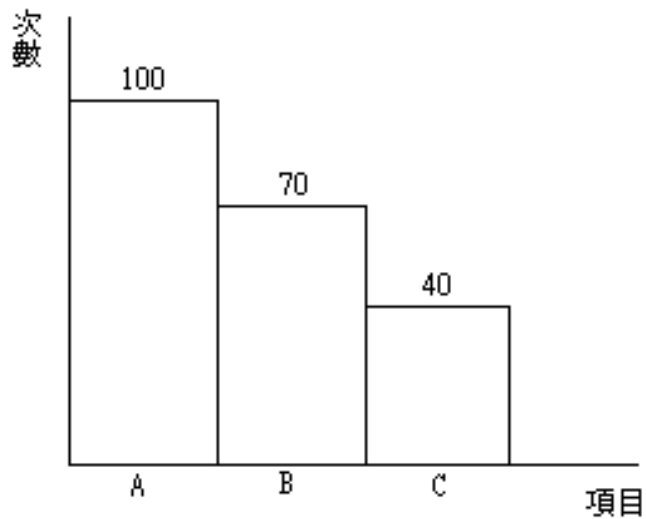
圖：柏拉圖



柏拉圖可提供的信息如下：

- 了解哪些問題或原因是重要的
- 明白欲解決問題的先後順序
- 知道每個項目在整體中所佔的比率
- 可以比較各項目在改善前後的差異

左縱軸應以成本表示，才能顯示真正的重要項目



繪製柏拉圖的注意事項：

柏拉圖的左軸除可以項目發生的次數表示外，尚可以發生的成本表示。倘若每一個項目所造成的成本不同，則左縱軸應以成本表示，才能顯示真正的重要項目

若有很多發生次數少或成本低的項目，則宜合併為其它項目，並將置於圖的最右邊。不過，有些學者則建議將包含其它項目的所有項目由大至小排序。

各項目的發生次數或成本若差異大即像新的山較陡，則橫軸中排序在前的項目是重要的，應優先解決。然而，若各項目的發生次數或成本彼此差異不大，即像老的山較平坦，則無法顯示各項目的重要性。

6. 機率與機率分配的定義

6.1 機率的定義

(1) 古典機率: 每個樣本點發生的機率相等

, S 有 n 個樣本點, Event 含 a 個樣本點, $P(E)=a/n$

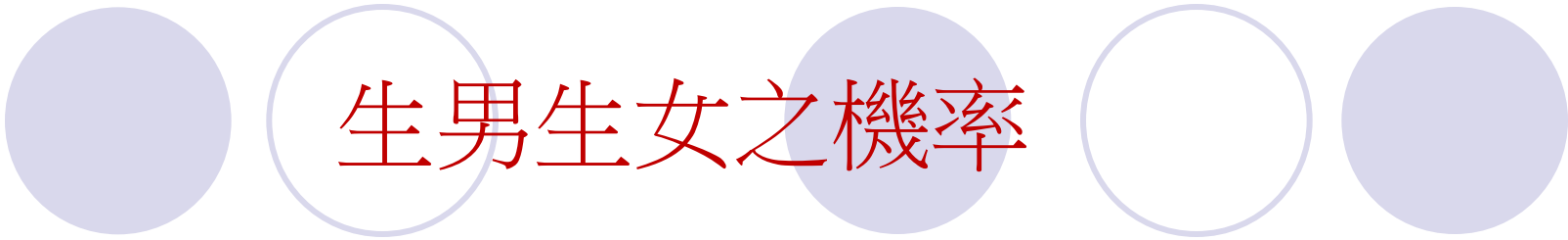
EX: 5pad, 3台故障, 任挑 1台, $S=\{ \text{良品}, \text{不良品} \}$, 則

$$P(\text{良品})=1/2=0.5$$

(2) 相對次數:

m : 實驗次數, b : Event的發生次數, $P(E)=b/m$

EX: 5pad, 3台故障, 任挑 1台, 則 $P(\text{良品})=3/5=0.6$



生男生女之機率

- 古典機率： $P(\text{生男})=0.5$
- 相對次數： $P(\text{生男})=\text{出生男生數}/\text{出生人數}$

6.2 重要的機率分配

- (1) 二項分配
- (2) 二項分配之應用 (np and p charts)
- (3) 波氏分配
- (4) 波氏分配之應用 (c and u Charts)
- (5) 常態分配
- (6) 常態分配之應用 (樣本平均數 ($\bar{X}$) 的抽樣分配, $\bar{X}$ and R charts, $\bar{X}$ and S charts, X and MR charts)

(1) 二項分配

a. 條件: a Bernoulli trial, $P(\text{success})=p$, $P(\text{fail})=1-p$

重覆 n times

Observe the number of success

b. r.v. X = the number of success with p.m.f

$$P(X=x) = C_x^n p^x (1-p)^{n-x}, x = 0, 1, 2, \dots, n.$$

c. $E(X)=np$

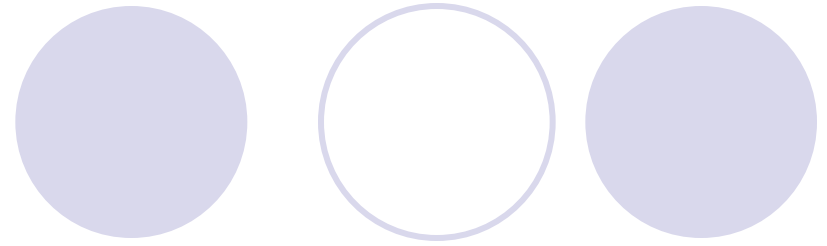
d. $V(X)=np(1-p)$

e. $p=0.5$, symmetric distri., $p=0$, right skewness,
 $p=1$, left skewness

f. $np > 5$, $n(1-p) > 5$, ----- $X \sim N(np, np(1-p))$

g. $n > 20$, $np \leq 7$ ----- $X \sim \text{Poisson}(np)$

(1)二項分配



EX: 公司機器故障之機率為0.1, 今有6台機器, 求最多2台故障之機率? 平均故障數? 故障數之變異數?

$$X \sim B(6, 0.1), x = 0, 1, 2, \dots, 6.$$

$$C_x^6 0.1^x 0.9^{n-x}, x = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Sol: 最多2台故障之機率

$$p = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$E(X) = 6 * 0.1 = 0.6$$

$$V(X) = 6 * 0.1 * 0.9 = 0.54$$

(2)二項分配之應用

不合格數(np)管制圖(control chart)

r.v. X :抽出 n 件裡的不合格數, $X \sim B(n, p)$, 製程穩定下

p 已知

$$CL=np, LCL=np-3\sqrt{np(1-p)}, UCL=np+3\sqrt{np(1-p)}$$

不合格率(p)管制圖(control chart)

$$\text{不合格率}=X/n, E(X/n)=p, V(X/n)=\frac{p(1-p)}{n}$$

$$CL=p, LCL=p-3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, UCL=p+3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

(3) 波氏分配

a. 條件: 觀察特定時間內或特定面積內事件發生之次數，事件之發生相互獨立，很短時間內發生之事件數最多1.

b. r.v. X = 特定時間內或特定面積內事件發生之次數
wit p.m.f

$$P(X=x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x=0,1,2,\dots, \lambda > 0.$$

c. $E(X) = \lambda$

d. $V(X) = \lambda$

e. small λ , right skewness,
large λ ----- symmetric distri..



EX: 已知每碼布之平均斑點數為6, 今自布批中抽取1碼, 若斑點個數少於2則允收該批布, 試求允收之機率?

Sol: r.v X =每碼布之斑點個數

$$\text{允收之機率} = P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1).$$

Ex: 公司生產產品 A 之不合格率為0.1, 今隨機抽取25個, 求最多2個不合格之機率? 平均不合格數? 故不合格數之標準差?

Sol: 以波氏分配計算近似值 (原為二項分配問題)

r.v. X =不合格數 $\sim \text{Po}(2.5)$

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$$

$$E(X) = 2.5 = V(X)$$

(4)波氏分配之應用

- a. 缺點數管制圖(製程穩定下)

r.v. X =抽取 n 件之缺點數, $E(X)=V(X)=\lambda$

$$CL=\lambda, LCL=\lambda-3\sqrt{\lambda}, \quad UCL=\lambda+3\sqrt{\lambda}$$

- b. 單位缺點數管制圖

單位缺點數 = X/n_i , $E(X/n_i)=u$, $V(X/n_i)=u/n_i$

$$CL=u, \quad LCL=u-3\sqrt{\frac{u}{n_i}}, \quad UCL=u+3\sqrt{\frac{u}{n_i}}$$

(5) 常態分配(Normal Distri.)

A. 鐘型對稱於平均數 μ ，反曲點到 μ 的距離為標準差 σ

B. r.v. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\text{pdf } f(x) = f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma}}, \quad -\infty < x < \infty$$

- C. $P(X < \mu) = P(X > \mu) = 0.5$

- D. $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

- E. $P(Z < 0) = P(Z > 0) = 0.5$

- F. $P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) = P(-k < Z < k)$

If $k=1$ then $P=0.645$, If $k=2$ then $P=0.9545$

If $k=3$ then $P=0.9974$

(5) 常態分配(Normal Distri.)

EX: 若公司生產的E機壽命呈常態分配，平均壽命2500小時，壽命標準差50小時，公司訂定的保證期限為1500小時，試問(1)顧客購買的E機在保證期限內故障之機率為何？(2)不在保證期限內故障之機率為何？(3) E機壽命超過2550小時之機率為何？

Sol: $X \sim N(2500, 2500)$

$$\begin{aligned}(1) P(X < 1500) &= P\left(\frac{X - 2500}{50} < \frac{1500 - 2500}{50}\right) \\ &= P(Z < -20) = 0\end{aligned}$$

$$(2) P(X > 1500) = 1 - 0 = 1$$

$$(3) P(X > 2550) = P\left(\frac{X - 2500}{50} > \frac{2550 - 2500}{50}\right) = P(Z > 1) = 0.15866$$

樣本平均數($\bar{X}$)的抽樣分配

一隨機樣本組 $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ ，抽自母體 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，

$$\text{則 } \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \quad [E(\bar{X}) = \mu, V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}]$$

Note：若母體分配未知或不為常態分配，但 μ, σ^2 已知，
則利用中央極限定理(CLT)，

可知

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \quad n \geq 30$$

Ex：已知公司生產的E機平均壽命2500小時，壽命標準差100小時，公司訂定的保證期限為2450小時，試

(1) 顧客購買36個E機之平均壽命在保證期限內的機率為？

(2) 此9個E機平均壽命超過3500小時之機率為何？

$$\text{Sol: } \bar{X} \sim N(2500, \frac{100^2}{36})$$

$$(1) P(\bar{X} < 2450) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{2450 - 2500}{100/\sqrt{36}}\right) = P(Z < -3) = 0.00135,$$

即顧客購買36個E機之平均壽命在保證期限內的機率=0.00135。

$$(2) P(\bar{X} > 3500) = P\left(\frac{\bar{X} - 2500}{100/\sqrt{36}} > \frac{3500 - 2500}{100/\sqrt{36}}\right) = P(Z > 60) = 0,$$

即顧客購買36個E機之平均壽命超過3500小時的機率=0。

(6) 常態分配的應用(管制圖的建立)

A. $\bar{X}$ 和MR管制圖的建立($n=1$)

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ and σ^2 已知.

$\bar{X}$ chart:

$$\begin{array}{lcl} \text{—————} & \text{UCL=} & \mu + 3\sigma \\ \text{—————} & \text{CL=} & \mu \\ \text{—————} & \text{LCL=} & \mu - 3\sigma \end{array}$$

B. $\bar{X}$ and R chart 的建立 μ and σ^2 已知

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad E(R) = d_2\sigma, \quad V(R) = d_3^2\sigma^2$$

$\bar{X}$ chart:

_____ UCL=

_____ CL=

_____ LCL=

$$\mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\mu - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

R chart:

_____ UCL=

_____ CL=

_____ LCL=

$$D_2\sigma \quad D_2 = 3.686$$

$$d_2\sigma$$

$$D_1\sigma$$

$$D_1 = 0, n = 2$$

(見管制圖之附表)₇₀

C. S chart 的建立

$$E(S) = C_4 \sigma$$

$$V(S) = (1 - C_4^2) \sigma^2$$

S chart:

$$C_4 \sigma + 3\sqrt{1 - C_4^2} \sigma = B_6 \sigma$$

$$C_4 \sigma$$

$$C_4 \sigma - 3\sqrt{1 - C_4^2} \sigma = B_5 \sigma$$

$$C_4 = \left(\frac{2}{n-1} \right)^{1/2} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

B5, B6, c4 (見管制圖之附表)

$1-\alpha = P(Z < z)$, where $Z \sim N(0,1)$

經濟部標準局	SPC2019384	政治大學楊素芳特聘教授
--------	------------	-------------

管制圖之附表

附 錄

附表 1 計量值管制圖之因子

樣本大小	平均值管制圖			標準差管制圖						全距管制圖					
	管制界限因子			中心線因子		管制界限因子				中心線因子		管制界限因子			
	A	A ₂	A ₃	C ₄	1/C ₄	B ₃	B ₄	B ₅	B ₆	d ₂	1/d ₂	d ₃	D ₁	D ₂	D ₃
2	2.121	1.880	2.659	0.7979	1.2533	0	3.267	0	2.606	1.128	0.8865	0.853	0	3.686	0
3	1.732	1.023	1.954	0.8862	1.1284	0	2.568	0	2.276	1.693	0.5907	0.888	0	4.358	0
4	1.500	0.729	1.628	0.9213	1.0854	0	2.266	0	2.088	2.059	0.4857	0.880	0	4.698	0
5	1.342	0.577	1.427	0.9400	1.0638	0	2.089	0	1.964	2.326	0.4299	0.864	0	4.918	0
6	1.225	0.483	1.287	0.9515	1.0510	0.030	1.970	0.029	1.874	2.534	0.3946	0.848	0	5.078	0
7	1.134	0.419	1.182	0.9594	1.0423	0.118	1.882	0.113	1.806	2.704	0.3698	0.833	0.204	5.204	0.076
8	1.064	0.373	1.099	0.9650	1.0363	0.185	1.815	0.179	1.751	2.847	0.3512	0.820	0.388	5.306	0.136
9	1.000	0.337	1.032	0.9693	1.0317	0.239	1.761	0.232	1.707	2.970	0.3367	0.808	0.547	5.393	0.184
10	0.949	0.308	0.975	0.9727	1.0281	0.284	1.716	0.276	1.669	3.078	0.3249	0.797	0.687	5.469	0.223
11	0.905	0.285	0.927	0.9754	1.0252	0.321	1.679	0.313	1.637	3.173	0.3152	0.787	0.811	5.535	0.256
12	0.866	0.266	0.886	0.9776	1.0229	0.354	1.646	0.346	1.610	3.258	0.3069	0.778	0.922	5.594	0.283
13	0.832	0.249	0.850	0.9794	1.0210	0.382	1.618	0.374	1.585	3.336	0.2998	0.770	1.025	5.647	0.307
14	0.802	0.235	0.817	0.9810	1.0194	0.406	1.594	0.399	1.563	3.407	0.2935	0.763	1.118	5.696	0.328
15	0.775	0.223	0.789	0.9823	1.0180	0.428	1.572	0.421	1.544	3.472	0.2880	0.756	1.203	5.741	0.347
16	0.750	0.212	0.763	0.9835	1.0168	0.448	1.552	0.440	1.526	3.532	0.2831	0.750	1.282	5.782	0.363
17	0.728	0.203	0.739	0.9845	1.0157	0.466	1.534	0.458	1.511	3.588	0.2787	0.744	1.356	5.820	0.378
18	0.707	0.194	0.718	0.9854	1.0148	0.482	1.518	0.475	1.496	3.640	0.2747	0.739	1.424	5.856	0.391
19	0.688	0.187	0.698	0.9862	1.0140	0.497	1.503	0.490	1.483	3.689	0.2711	0.734	1.487	5.891	0.403
20	0.671	0.180	0.680	0.9869	1.0133	0.510	1.490	0.504	1.470	3.735	0.2677	0.729	1.549	5.921	0.415
21	0.655	0.173	0.663	0.9876	1.0126	0.523	1.477	0.516	1.459	3.778	0.2647	0.724	1.605	5.951	0.425
22	0.640	0.167	0.647	0.9882	1.0119	0.534	1.466	0.528	1.448	3.819	0.2618	0.720	1.659	5.979	0.434
23	0.626	0.162	0.633	0.9887	1.0114	0.545	1.455	0.539	1.438	3.858	0.0592	0.716	1.710	6.006	0.443
24	0.612	0.157	0.619	0.9892	1.0109	0.555	1.445	0.549	1.429	3.895	0.2567	0.712	1.759	6.031	0.451
25	0.600	0.153	0.606	0.9896	1.0105	0.565	1.435	0.559	1.420	3.931	0.2544	0.708	1.806	6.056	0.459

若 $n > 25$ ，則依下列公式計算下列各項因子：

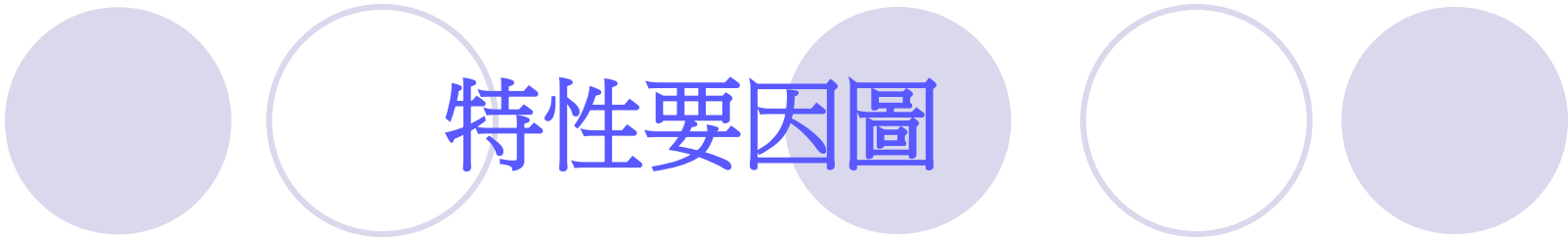
$$A = \frac{3}{\sqrt{n}}, \quad A_2 = \frac{3}{d_2\sqrt{n}}, \quad A_3 = \frac{3}{c_4\sqrt{n}}, \quad c_4 \cong \frac{4(n-1)}{4n-3}, \quad B_3 = 1 - \frac{3}{c_4\sqrt{2(n-1)}},$$

$$B_4 = 1 + \frac{3}{c_4\sqrt{2(n-1)}}, \quad B_5 = c_4 - \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}}, \quad B_6 = c_4 + \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}}$$



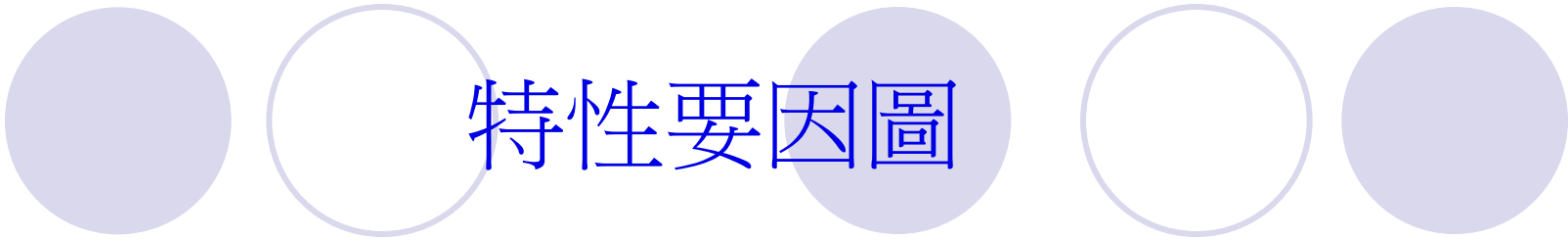
7. 品管7手法

- 1. Checking Sheet 檢核圖
- 2. Pareto chart 柏拉圖
- 3. Cause-effect diagram 特性要因圖
- 4. Control chart 管制圖
- 5. Histogram 直方圖
- 6. Scatter plot 散佈圖
- 7. Stratification 層別法 (or 腦力激盪法)

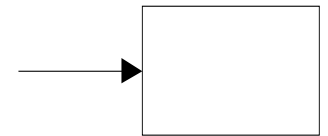


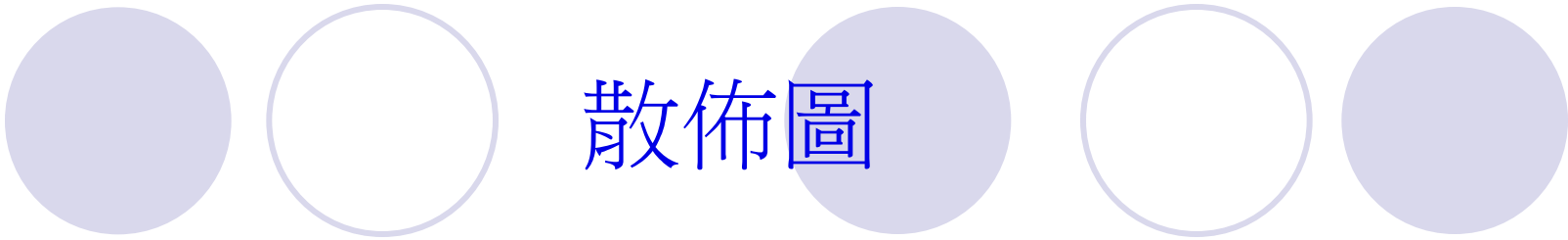
特性要因圖





特性要因圖



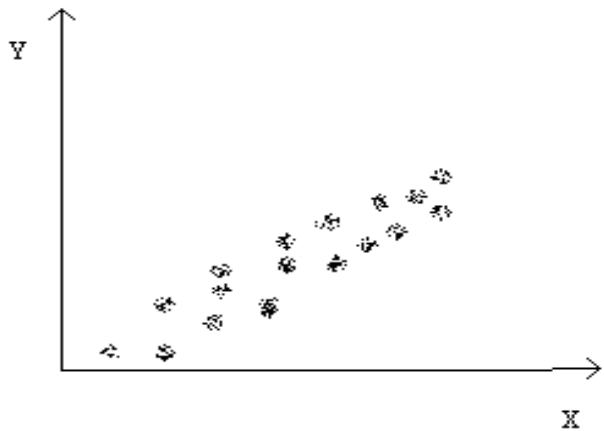


散佈圖

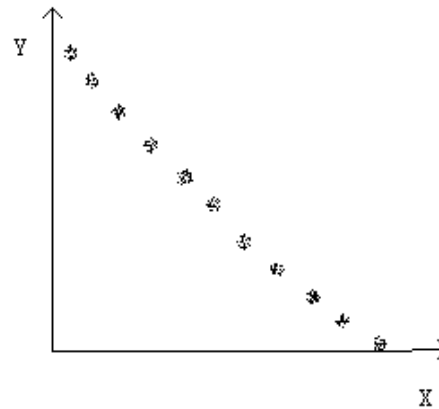
- 了解產品的兩個品質特性之關係
- 了解產品的品質特性是否受到要因的影響
- 判斷異常值

散佈圖

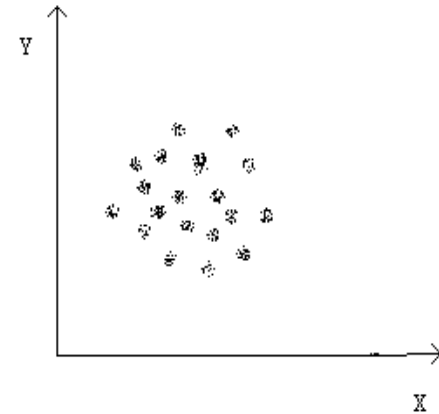
表示兩個變數配對數據的分佈情形，其可據以了解兩個變數間的相關性。散佈圖的橫軸(X軸)和縱軸(Y軸)分別代表成對的兩變數之數據。



正相關的散佈圖



完全負相關的散佈圖



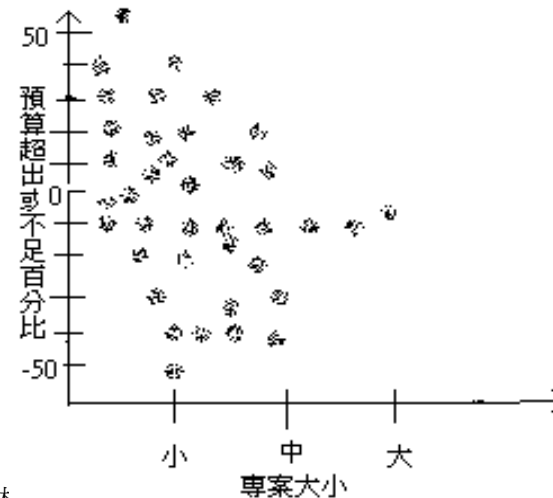
不相關的散佈圖

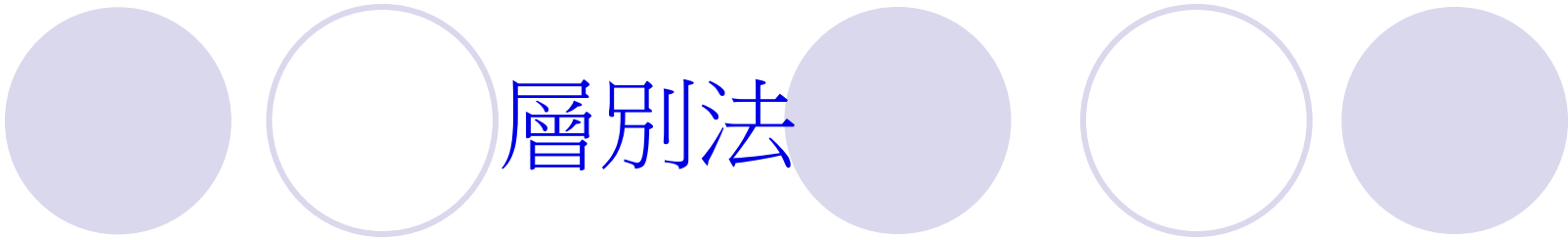
層別法

- 分析品質變異的重要原因，來自原料商，機器商，人員或操作方法等。將這些因素依特性分門別類，找出其間的差異或問題，再據以改善的方法稱為層別法。

公司的**20件專案**預算被發現有失控的情形

專案	預算超出或不足百分比	專案	預算超出或不足百分比
小1	-12.5	中11	-0.7
中2	0.1	小12	-7.8
中3	-6.1	中13	0.7
小4	10.1	小14	-5.7
小5	10.1	中15	3.5
小6	9.5	小16	-9.1
小7	-12.5	小17	-5.2
中8	1.3	小18	9.1
中9	-0.7	中19	0.7
小10	30	小20	-5.9





層別法



一因子變異數分析

8. 管制圖

8.1. 變異(variation)的原理

- Data(數據)不一致?

Ex: 相同製造環境下的可樂容量也不全相等

- 於設定的目標值

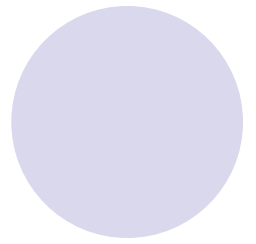
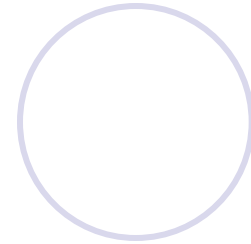
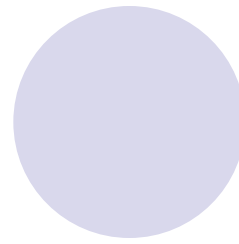
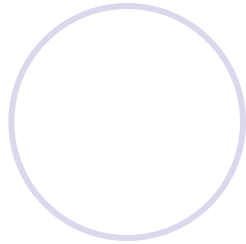
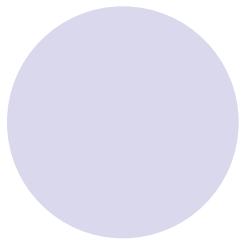
- 自己名字寫10次也不全相同



只要有數據



變異總是存在著



- 統計學之各種分配 來自 data 之 variation
- ex, 常態, Chi-square, Gamma

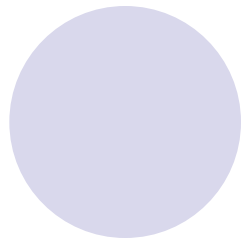
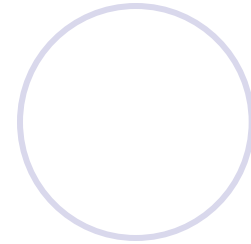
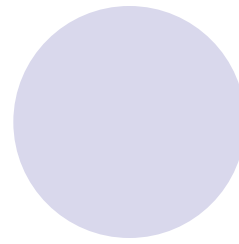
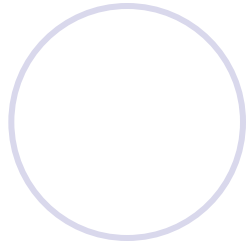
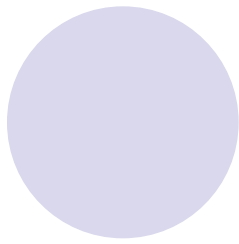


in practice

- Homogeneous data?

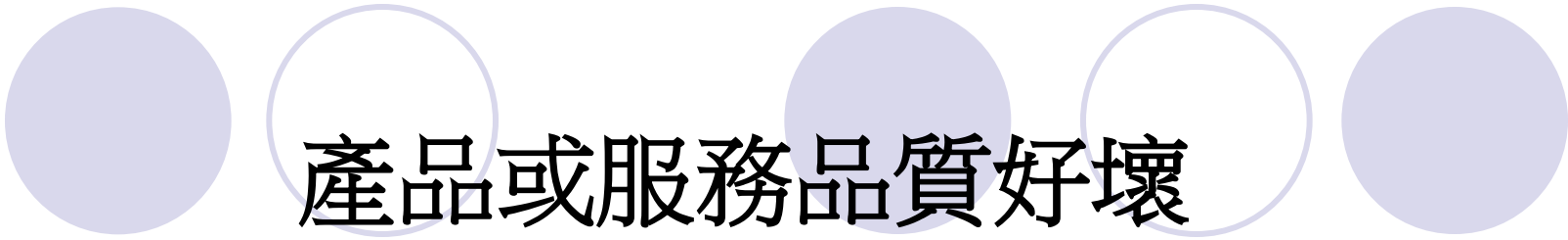
- Is it available?

- variation?



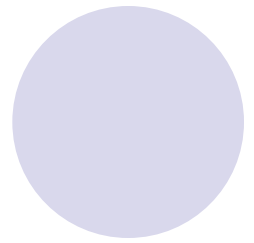
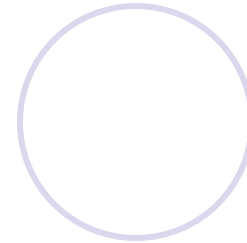
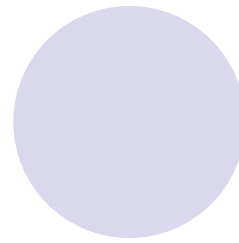
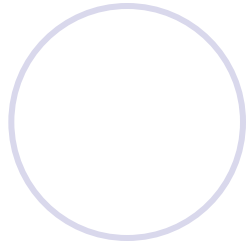
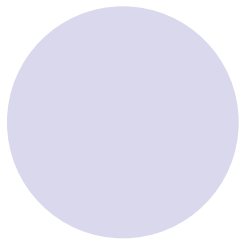
- EX: 製造的1萬罐可樂容量若全相等,

- 分配是什麼?



產品或服務品質好壞

- Variation 大 quality 差
- Variation 小 quality 好

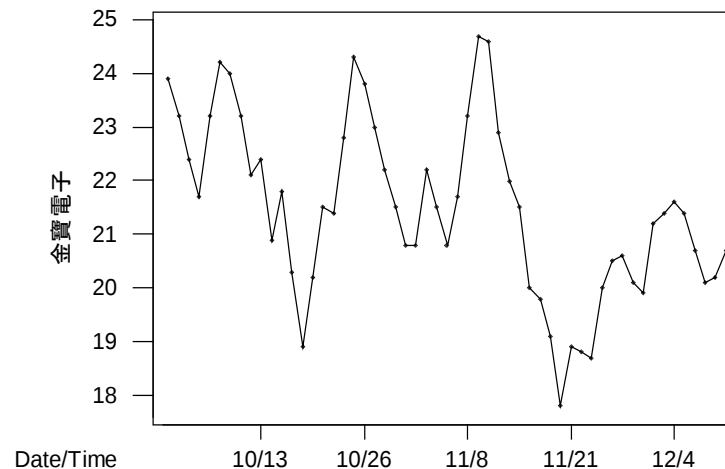


變異不只發生在同一時間點
收集之數據裡

不同時間點收集之數據亦有變異

data在時間數列的variation

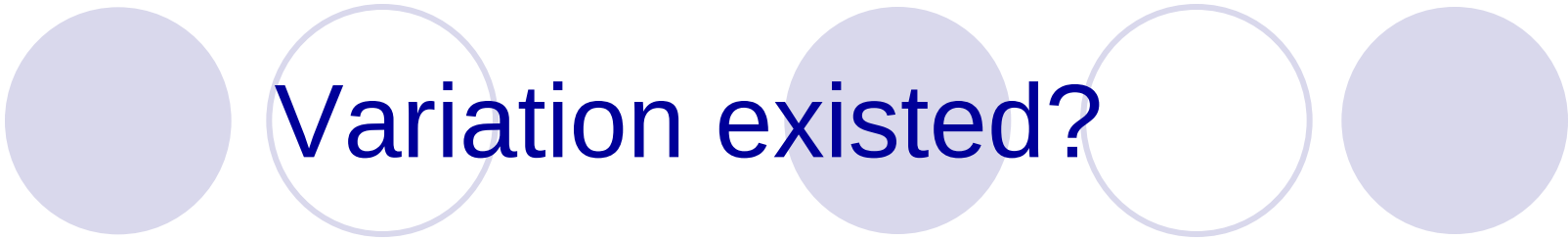
- EX: 金寶公司近三個月股價之推移圖



● 倘若圖為製造之可樂容量之推移圖？

● Variation is unacceptable!!

經濟部標準局SPC2013政治大學楊素芬特聘教授

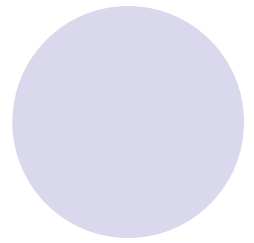
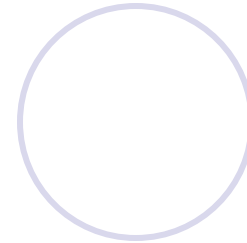
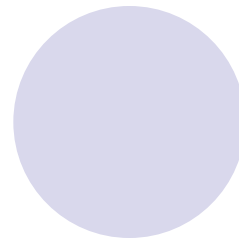
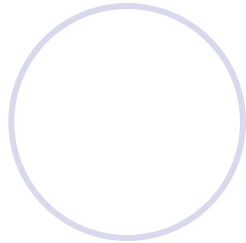
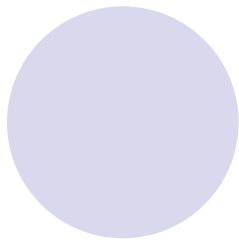


Variation existed?

- 合格材料 設備 操作方法 作業員及環境

- 產出仍存在變異

- why?



Source of Variation



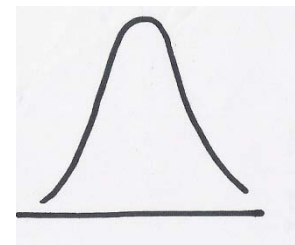
Special Causes 特殊因



Common Causes 共同因

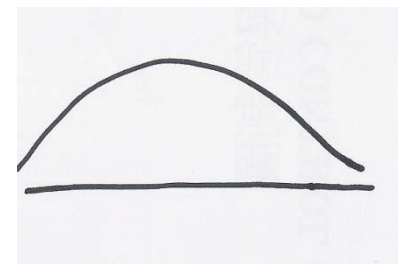
C.C. of Variation: 特性

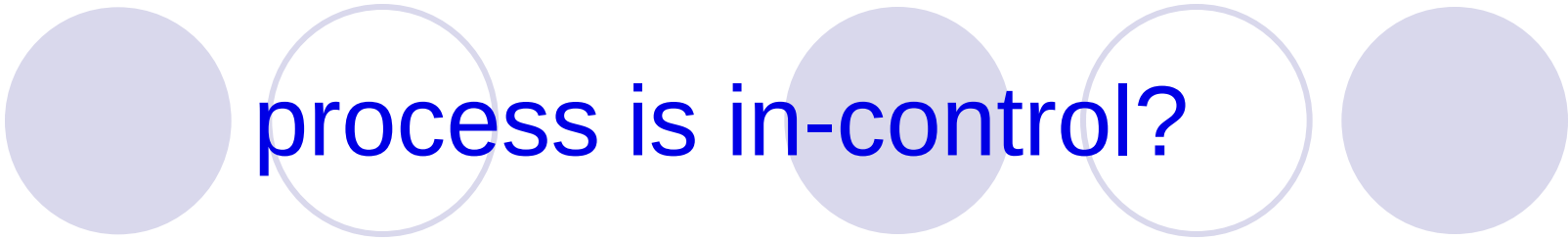
- 在製程中，任何時刻都存在，
- 影響力隨時不同。個別影響力很小，
- 但個數多
- 就整體而言，它可以加總成不小變異



S.C. of Variation: 特性

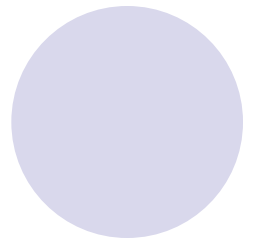
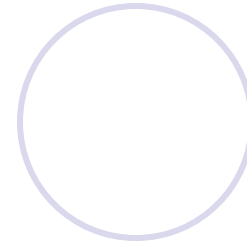
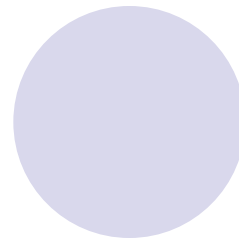
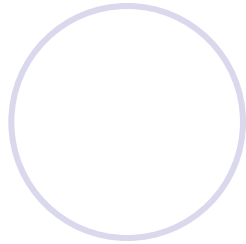
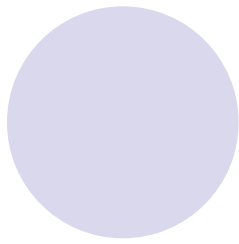
- 並不常在流程中，其發生通常是來自流程外的，對變異有大的影響，
- 個數少





process is in-control?

- In-Control: C.C.
- Out-of-Control: S.C.+C.C.
- SC: 材料 作業員 機器設備 操作方法 (4M),....
- CC: 設計 機器老舊 環境因素
- 材質退化,....

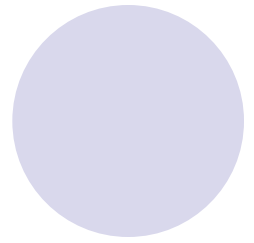
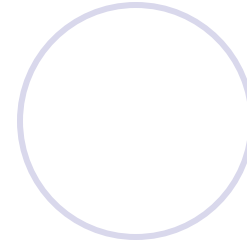
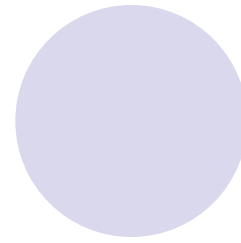
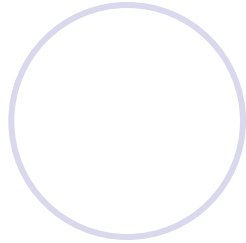
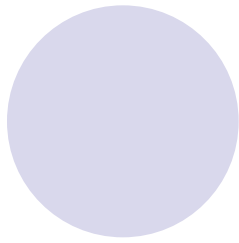


- 如何知道 process is out-of-control?

- 如何看見數據之變異?

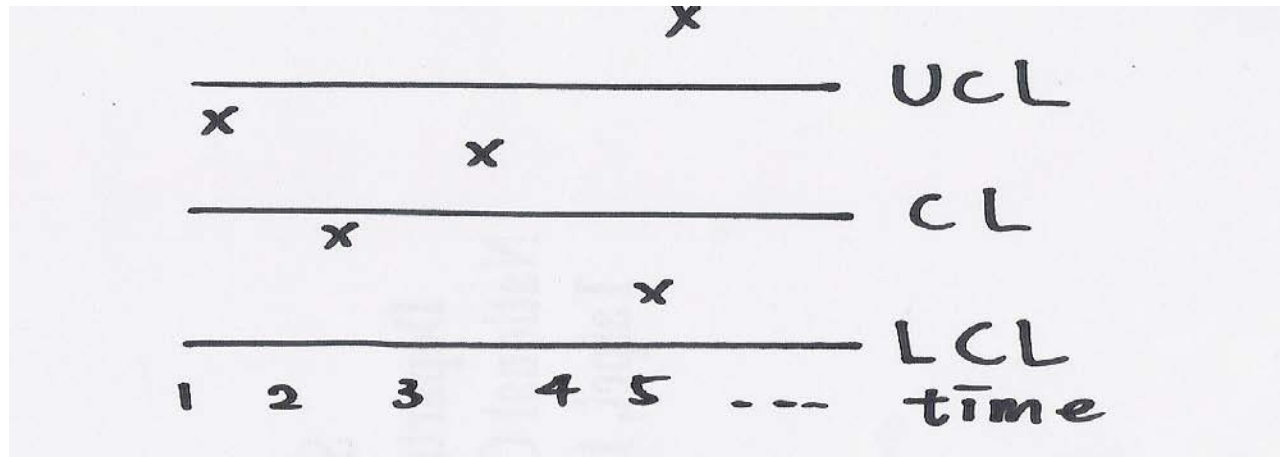


How to know the occurrence
of special cause??

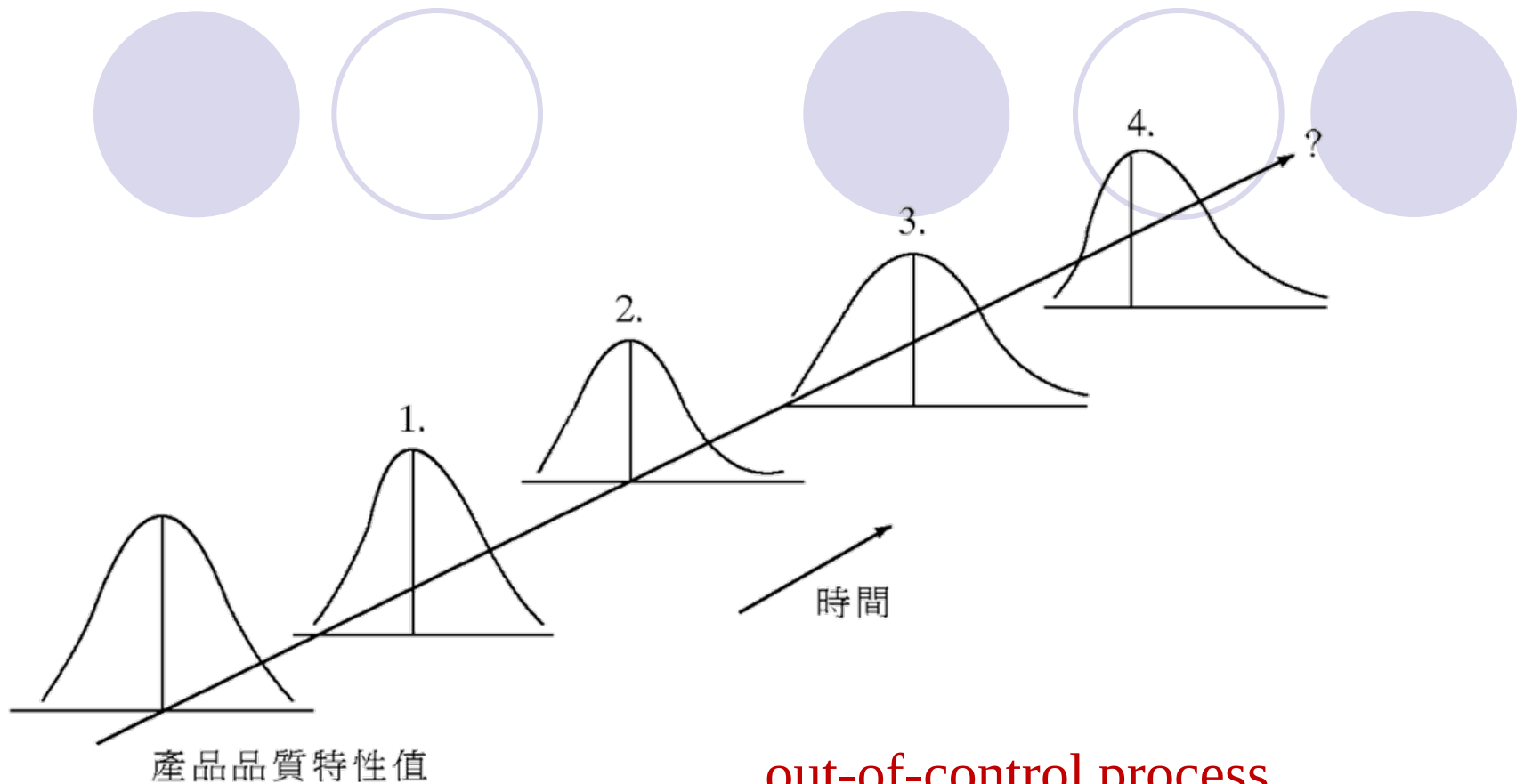


collect data and plots it

使變異看的見—管制圖



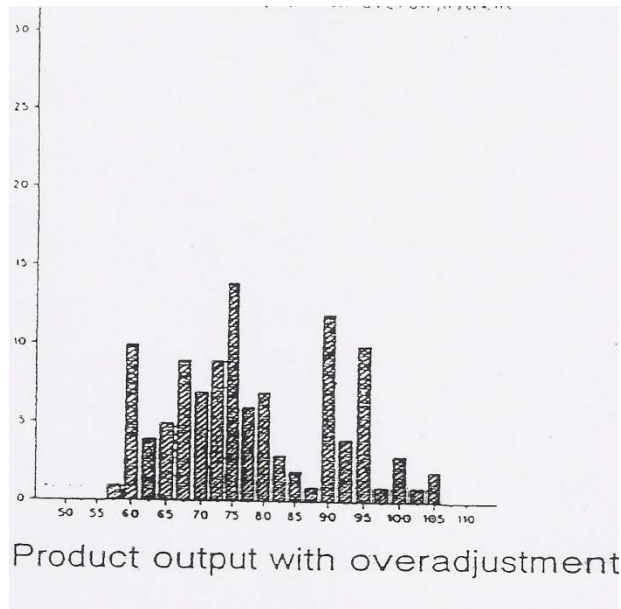
管制圖的解釋：
流程是否穩定？



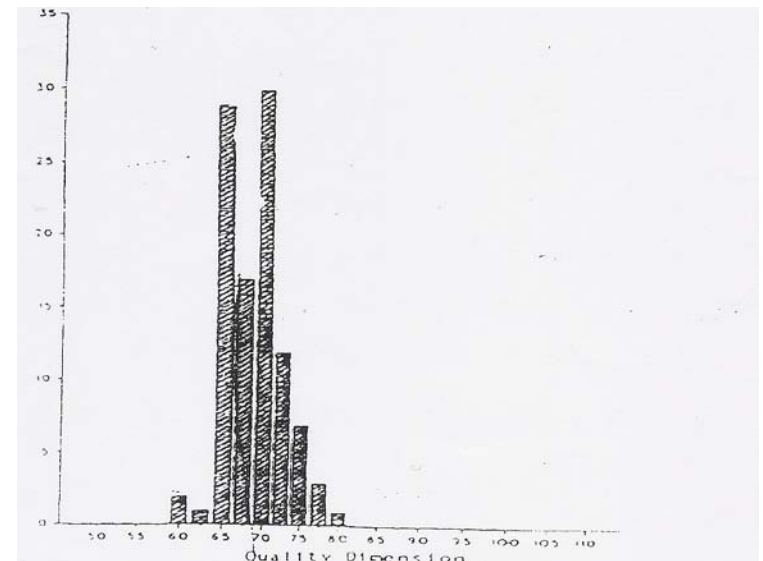
out-of-control process.

Action: find SC and remove it,
process back in-control

action for out-of-control process

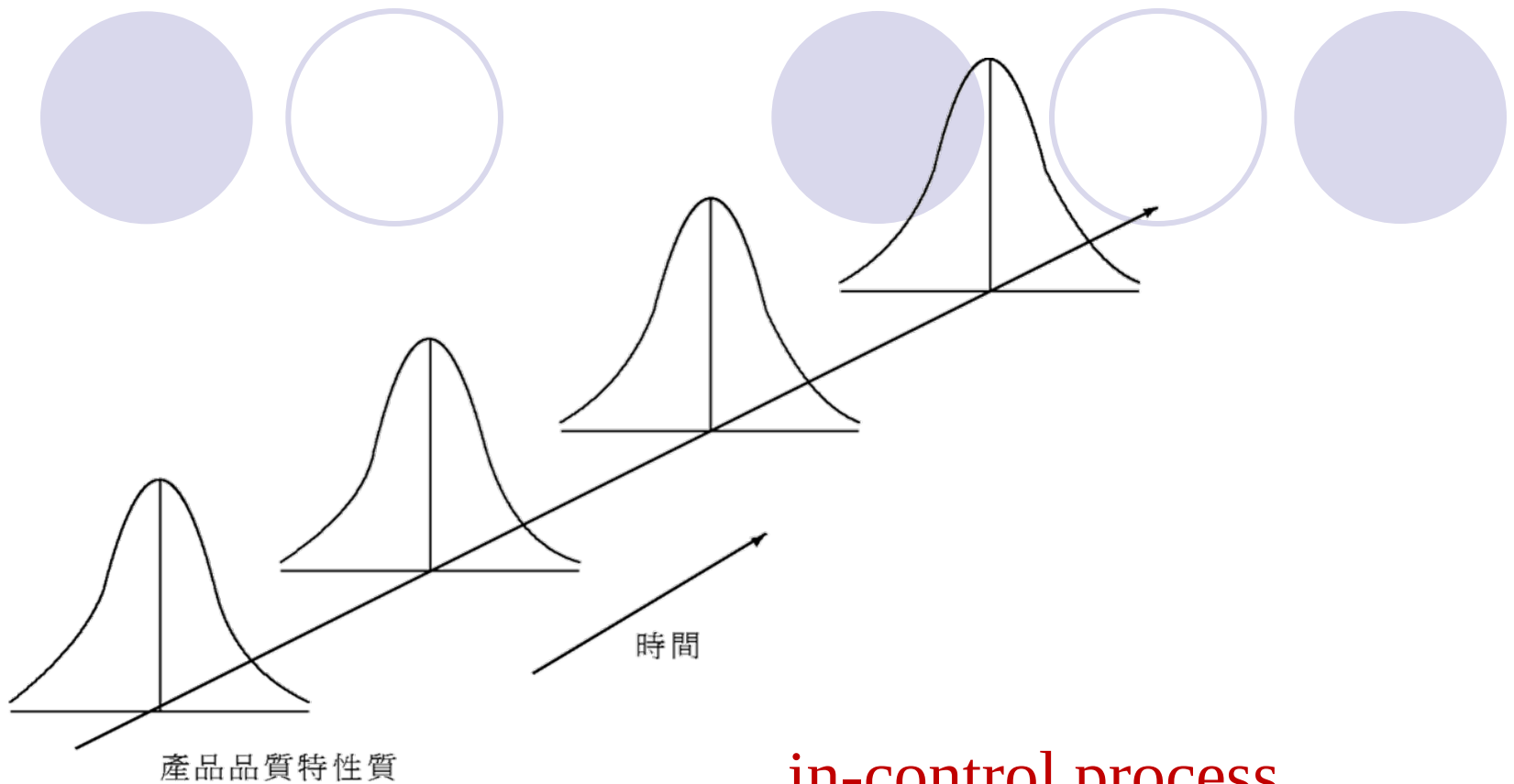


remove
SC



out-of-control distribution

in-control distribution



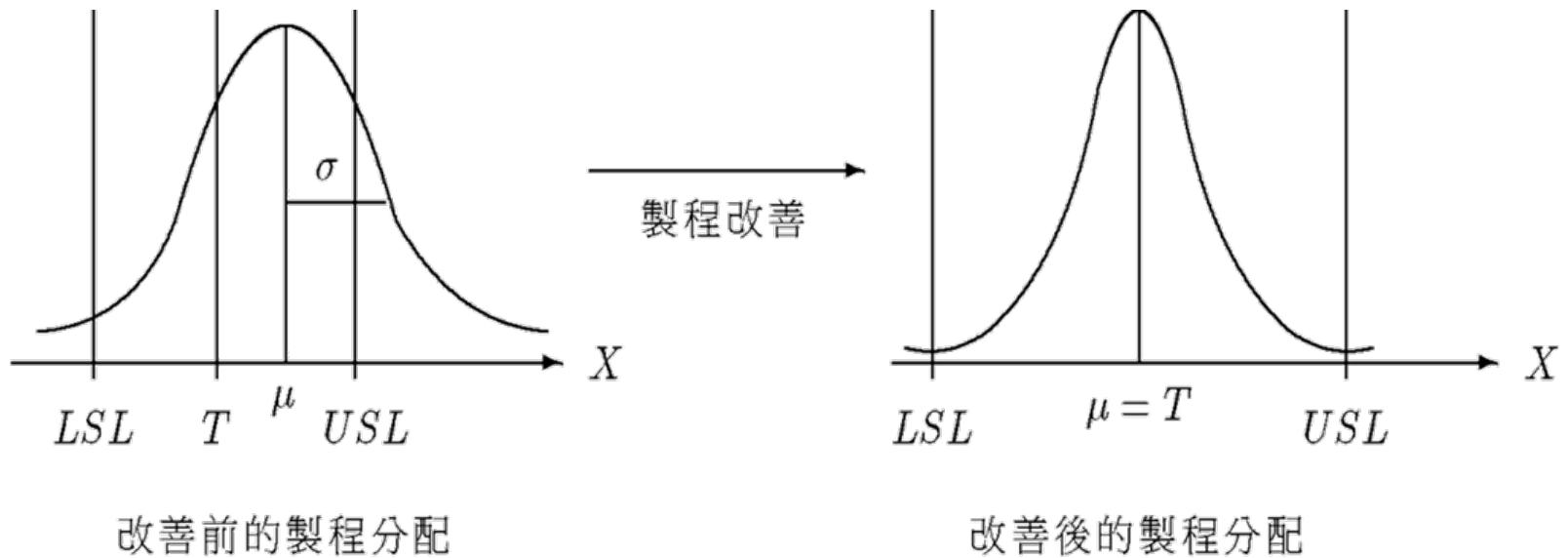
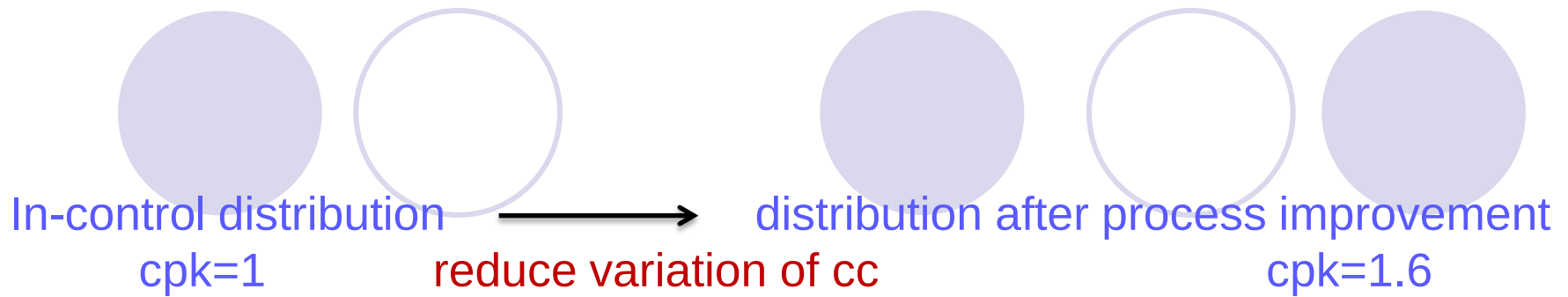
in-control process.

next step:

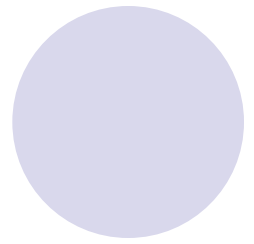
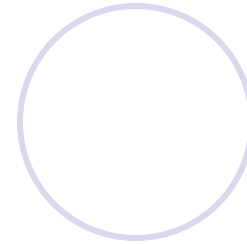
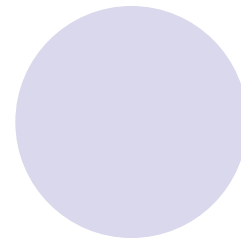
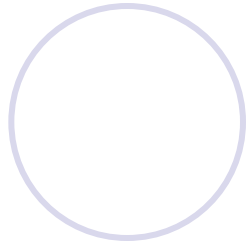
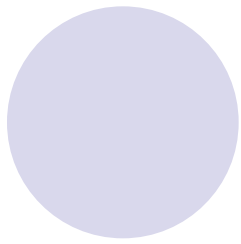
process capability?

need process improvement?

Continuous improvement



改善前後的製程分配



How to make a control chart

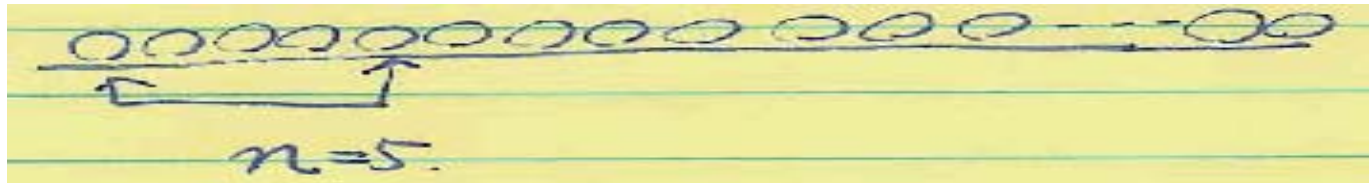
管制圖的建立步驟

- 1 · 選擇品質特性
- 2 · 決定管制圖之種類
- 3 · 決定樣本大小(n)、抽樣頻率(h)、和抽樣方式
- 4 · 收集 m 組樣本數據(母體參數未知)
- 5 · 計算試驗管制圖之CL、ULC 和LCL
- 6 · 將描點繪在圖上，判斷收集 m 組樣本數據是否來自穩定製程？
 - 若點出界是因可歸屬原因，則點應剔除後，重新計算管制界限，若描點已呈隨機分佈，表示剩餘樣本數據來自穩定製程(phase I)。製程則管制界限才可用來監視未來之製程。
- 7 · 用於監控製程:每 h 小時收集 n 筆數據，計算追蹤統計量，點於管制圖上以判斷製程是否失控.(phase II)

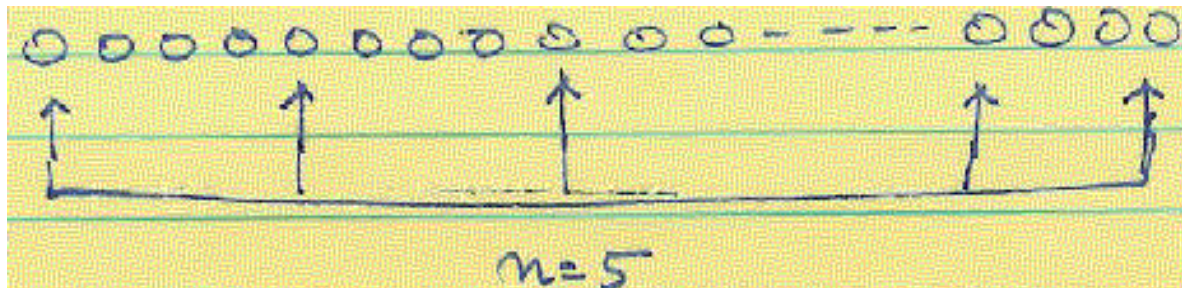
合理樣本組

- 製程上收集的樣本數據必需是合理的樣本組。這表示當特殊因出現時，樣本組間差異大而樣本組內差異小。是以管制圖可偵測出製程是否失控。抽樣方式：

- 1．瞬時法：常用之方法，用於製程平均值瞬間跳動

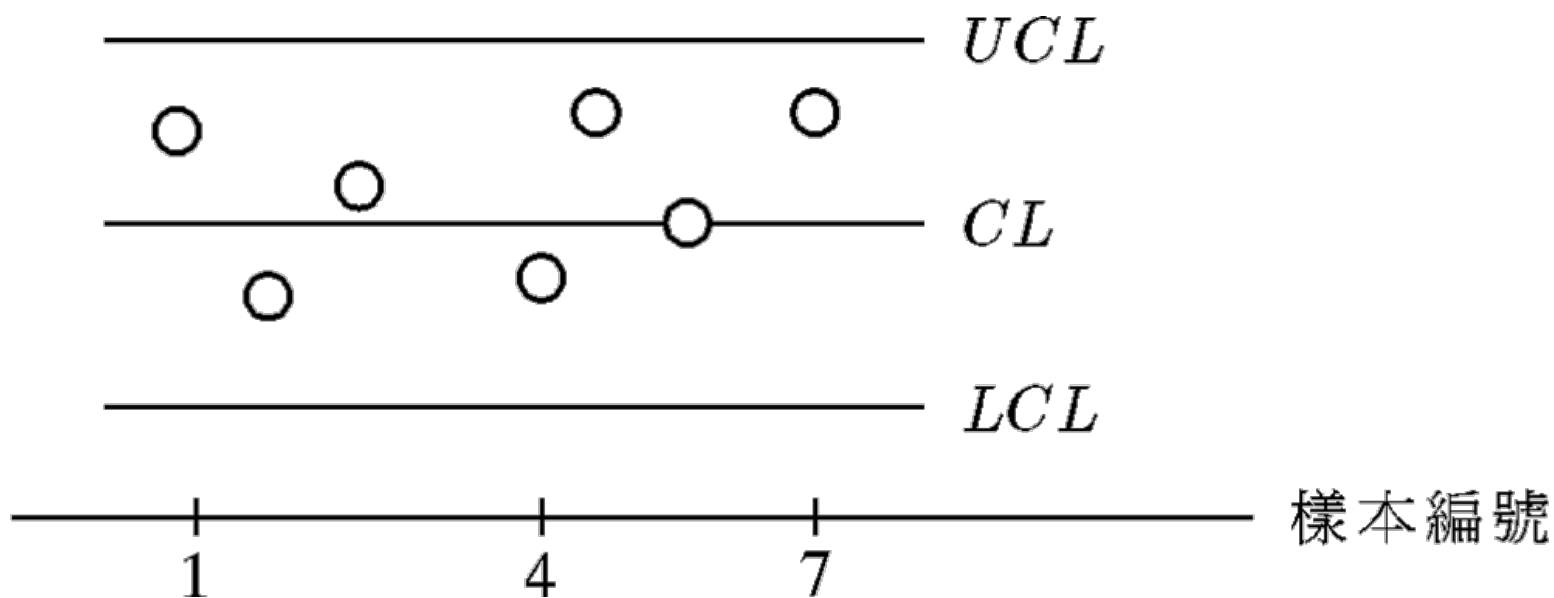


- 2．定時法或分散式抽樣：用於製程平均值定期調動



管制圖的統計原理

Based on in-control distribution of quality variable



Shewhart w 管制圖的架構

$$UCL_w = \mu_w + 3\sigma_w$$

$$CL_w = \mu_w$$

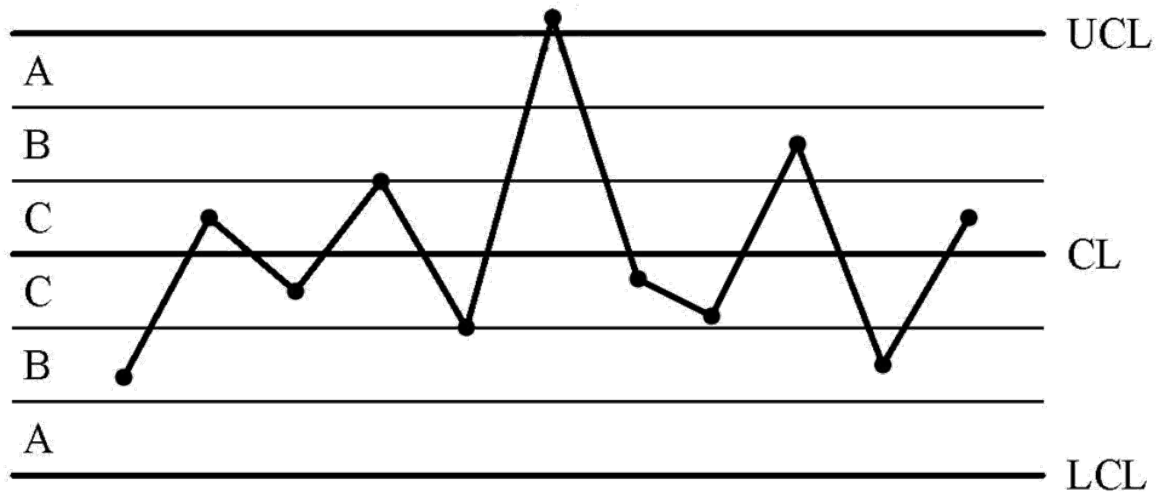
$$LCL_w = \mu_w - 3\sigma_w$$

Viewpoint of Statistics

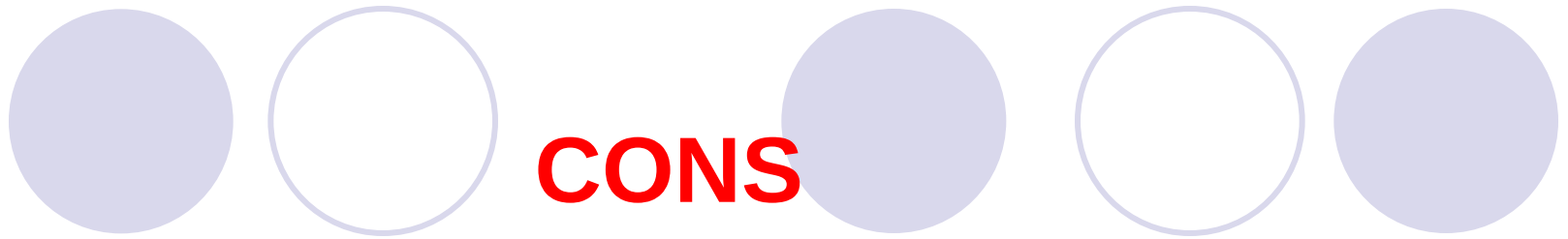
- $UCL = \text{mean}_w + 3\text{sigma}_w$
- $LCL = \text{mean}_w - 3\text{sigma}_w$
- $\text{Alpha} = 0.0027 = \text{false alarm rate}$
- $\text{ARL0} = 1/\text{alpha} = 370.4$
-
- H_0 : process is in control (parameter no shift)
- H_1 : process is out of control (shifts)

管制圖的判讀

一點子(w)落在 A 區以外，即舒華特判讀製程失控之法則。



Determine n , h and k
monitoring statistic w



CONS

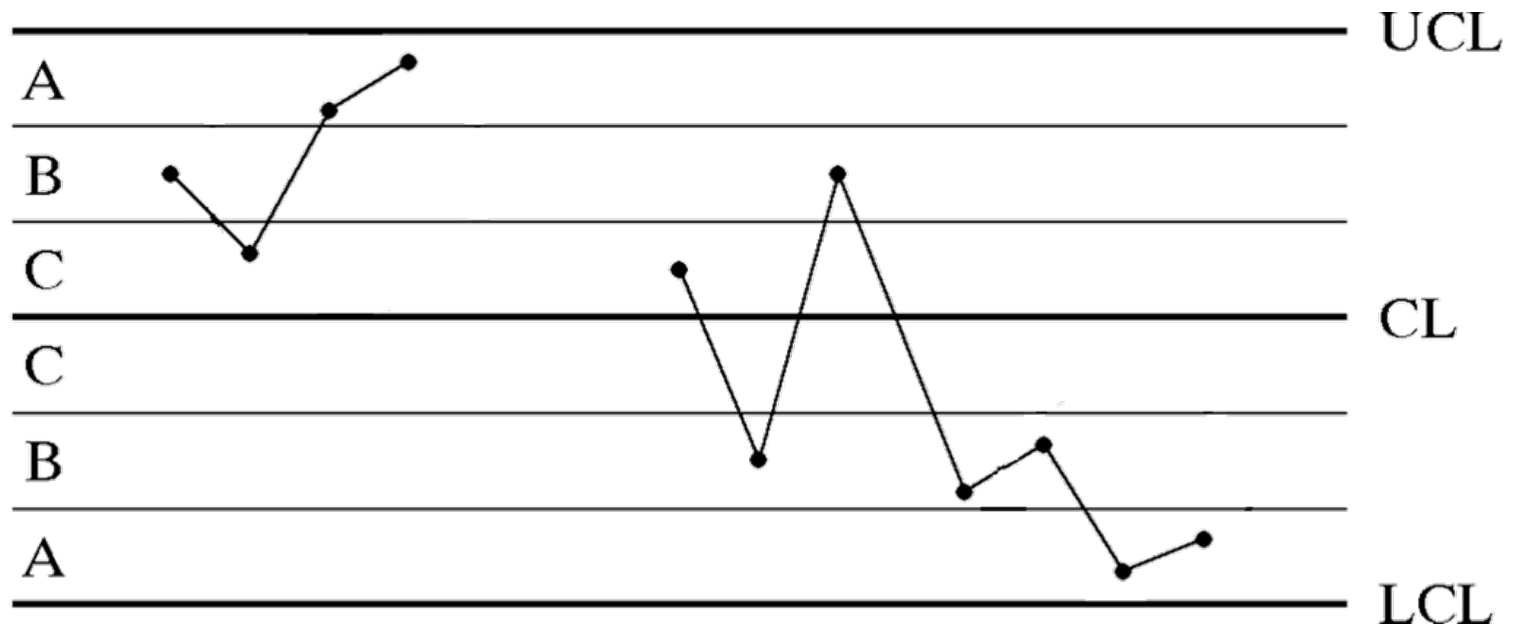
- not sensitive for
- small shift in process parameter
- (mean or variance)
- =poor detection ability
- (that is, power ,1-beta, is not good)

西方電器公司管制圖的判讀

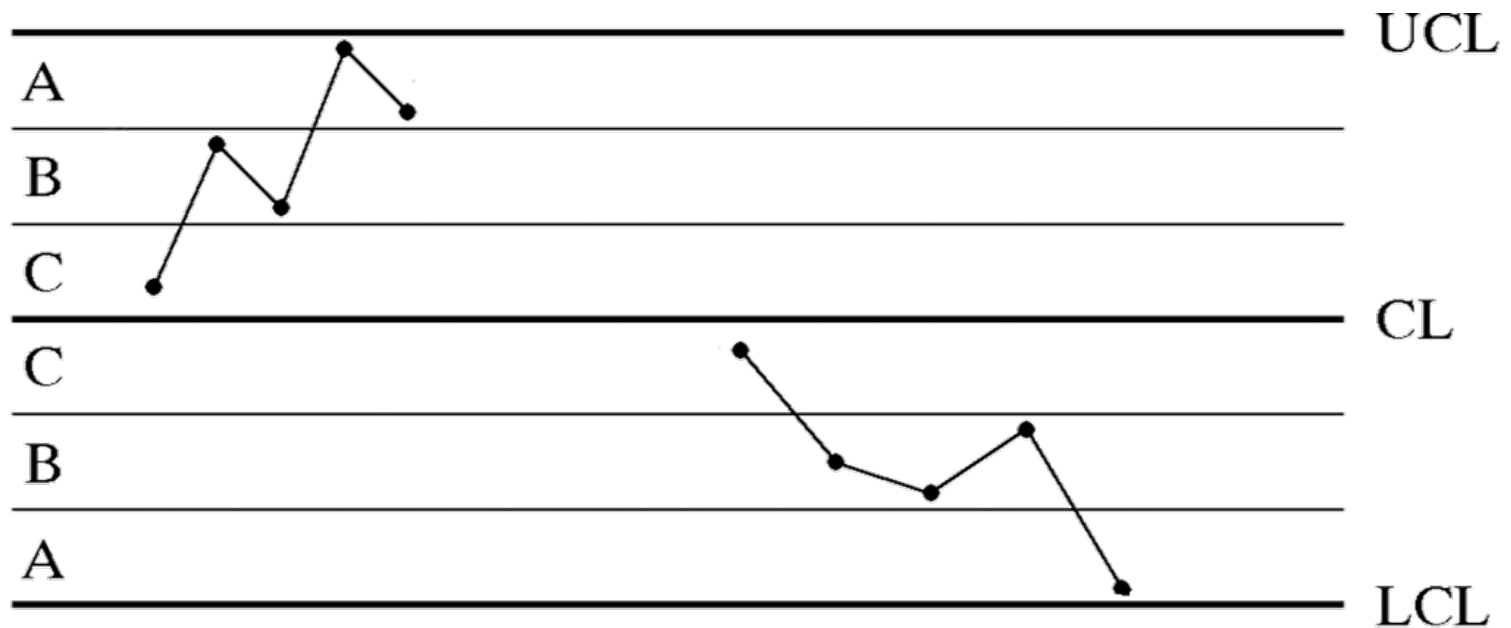
A	$\mu_w + 3\sigma_w = \text{UCL}$
B	$\mu_w + 2\sigma_w$
C	$\mu_w + \sigma_w$
C	$\mu_w = \text{CL}$
B	$\mu_w - \sigma_w$
A	$\mu_w - 2\sigma_w$
	$\mu_w - 3\sigma_w = \text{LCL}$

區域檢定的法則如下

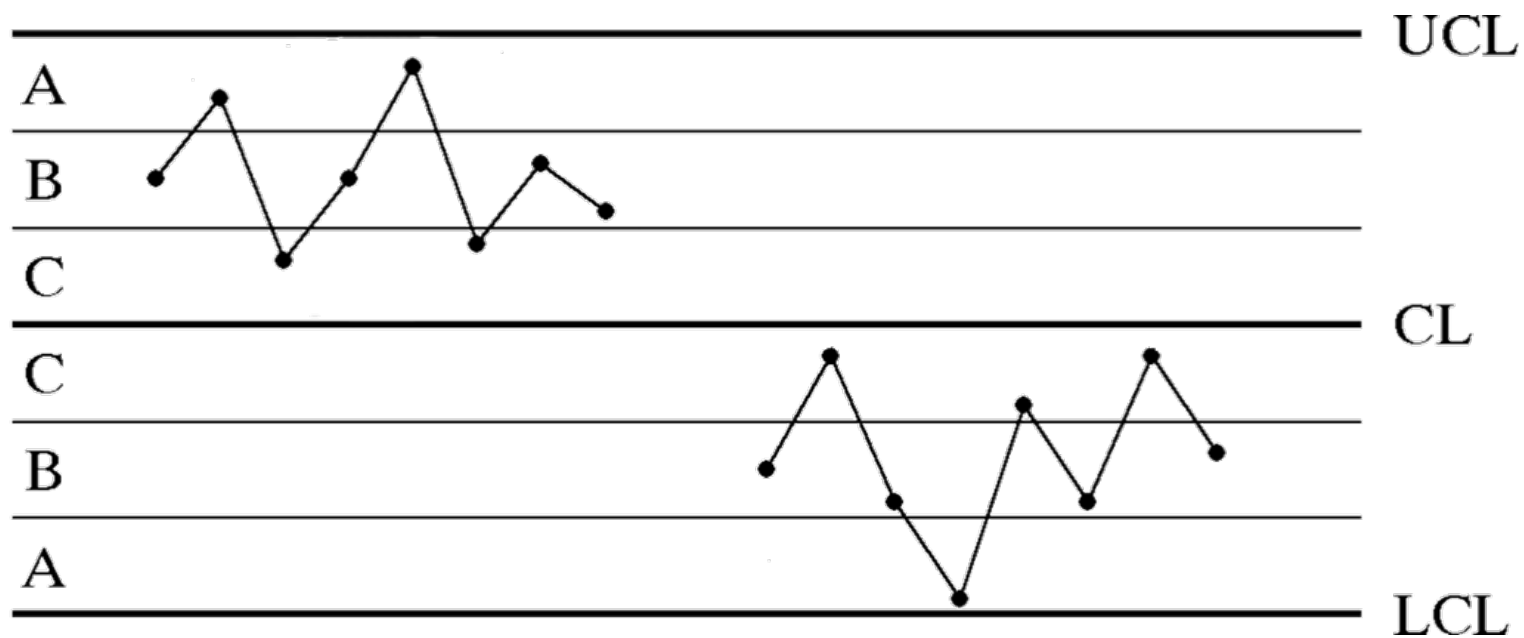
- 連續三點中有兩點落在A 區或A 區之外

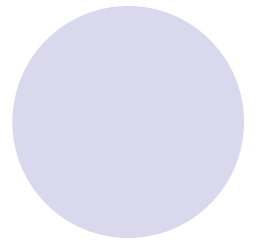
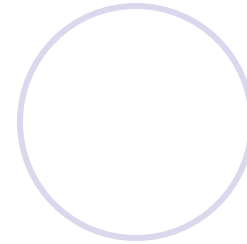
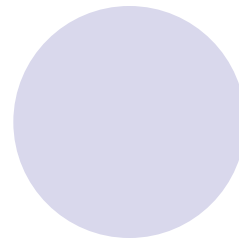
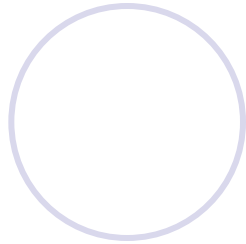
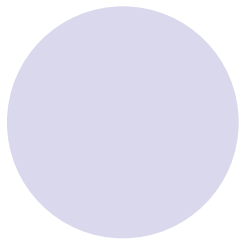


連續五點中有四點落在B 區或B區之外



連續八點在中心線之同一側





區域檢定的法則

增加

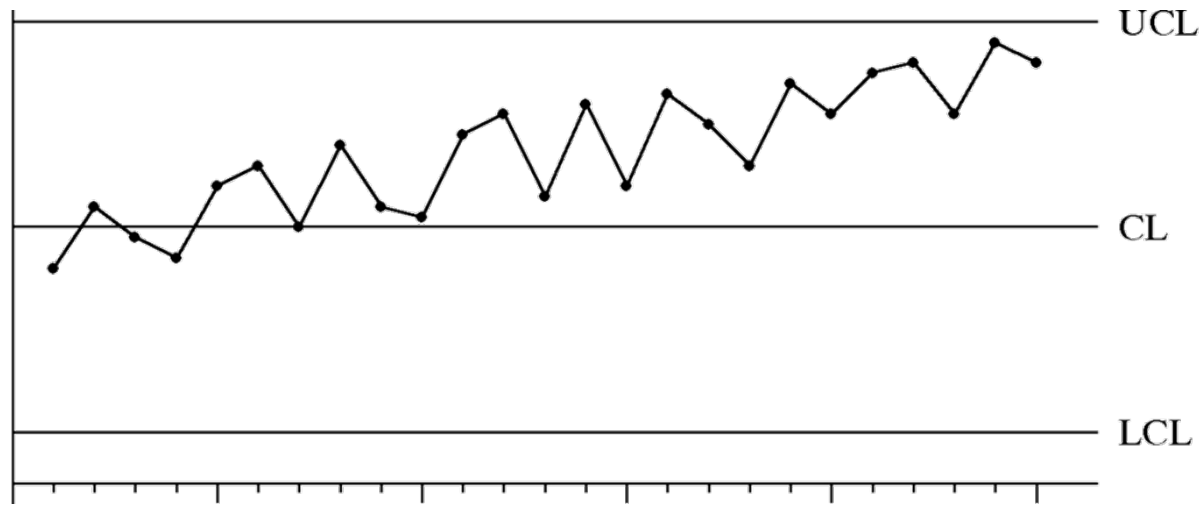
Shewhart 管制圖的偵測力

(for small shift in process parameter)

increase power (1-beta)

其他檢定的法則

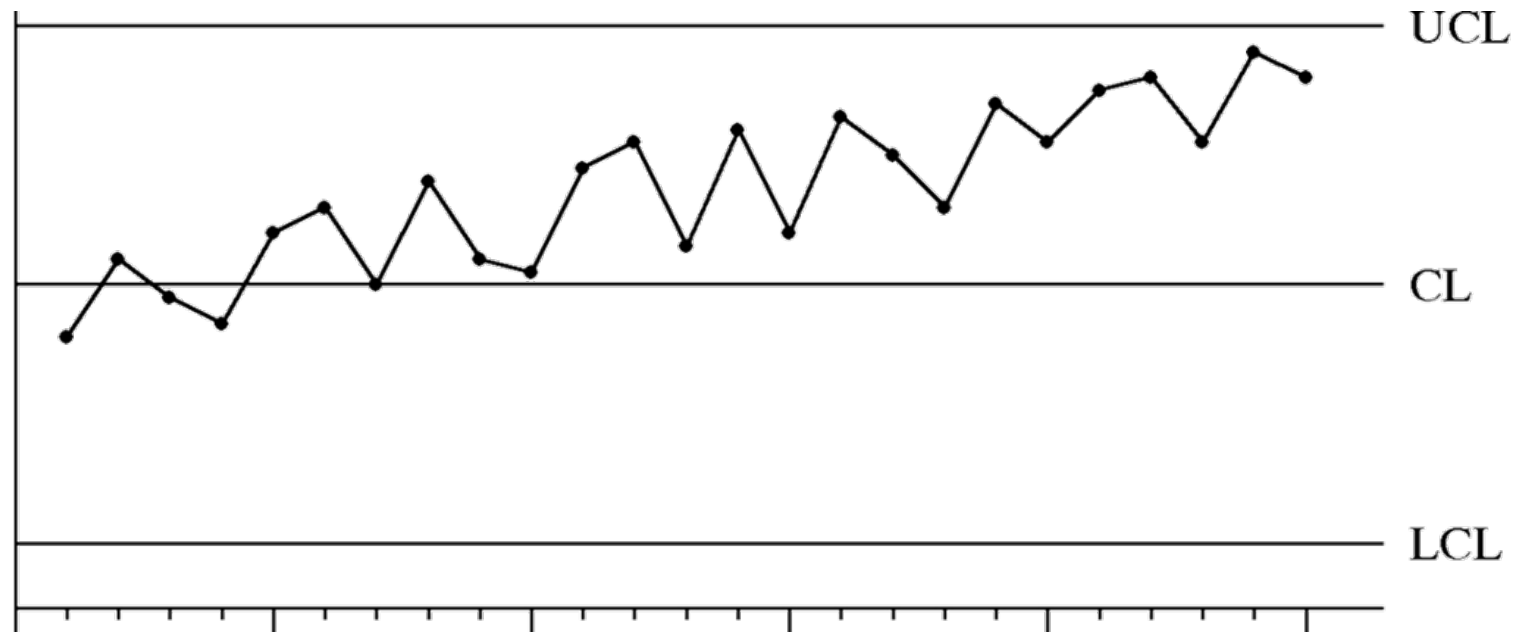
趨勢變化



平均值的漂移

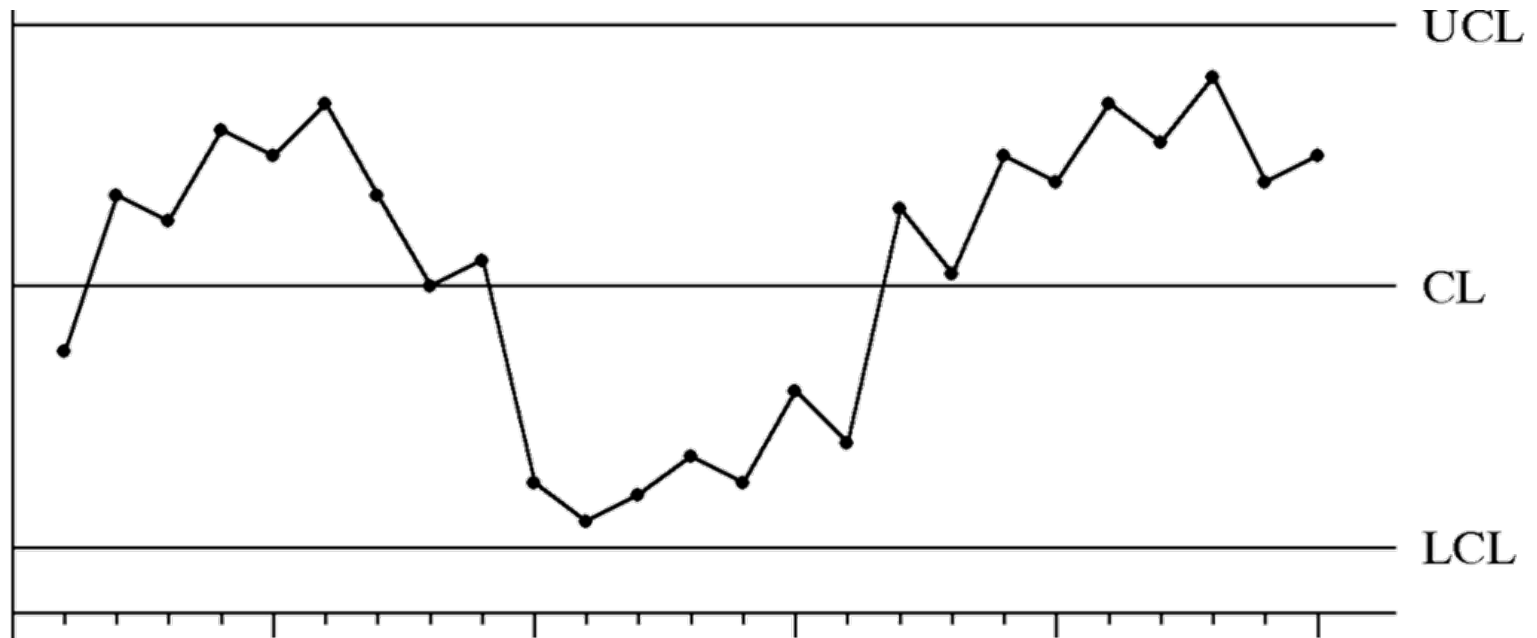
作業員疲勞或機器老化,...

製程平均值的平移



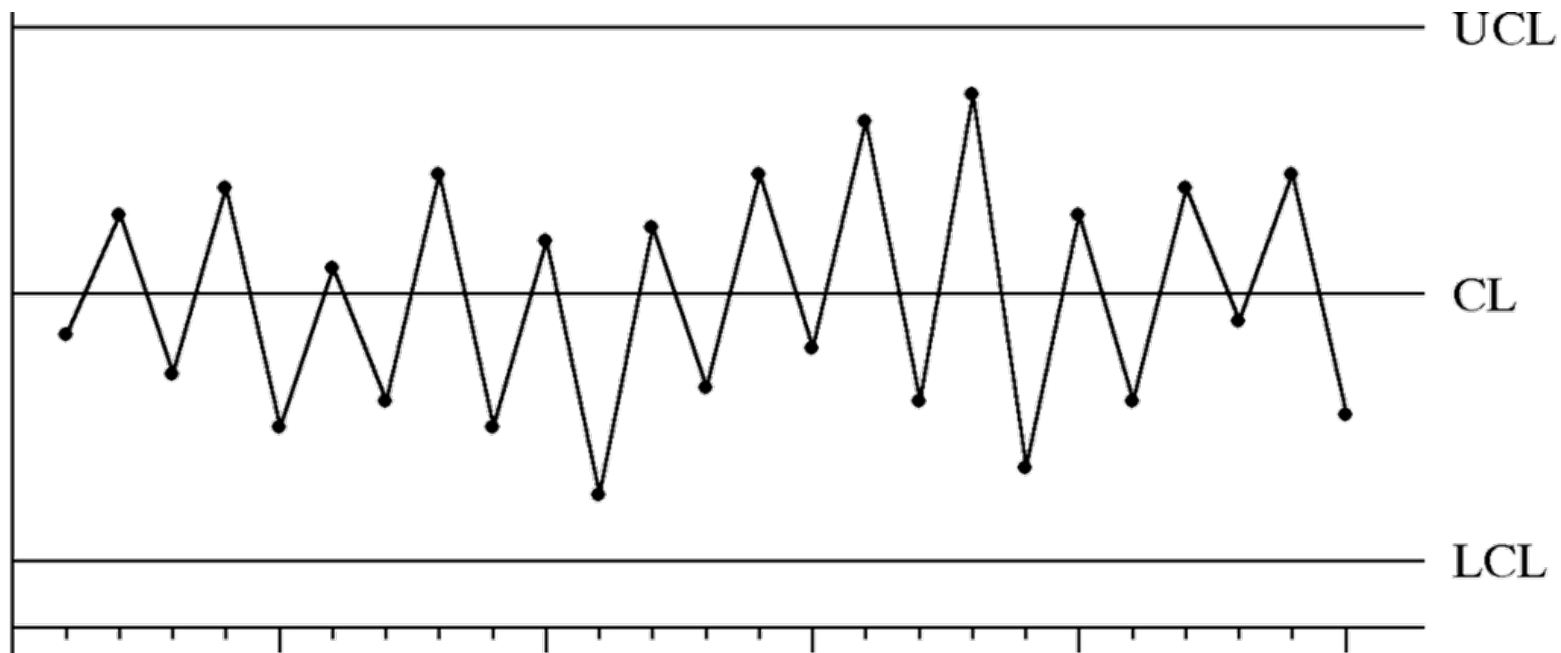
作業員執行錯誤或機器故障,...

循環變化



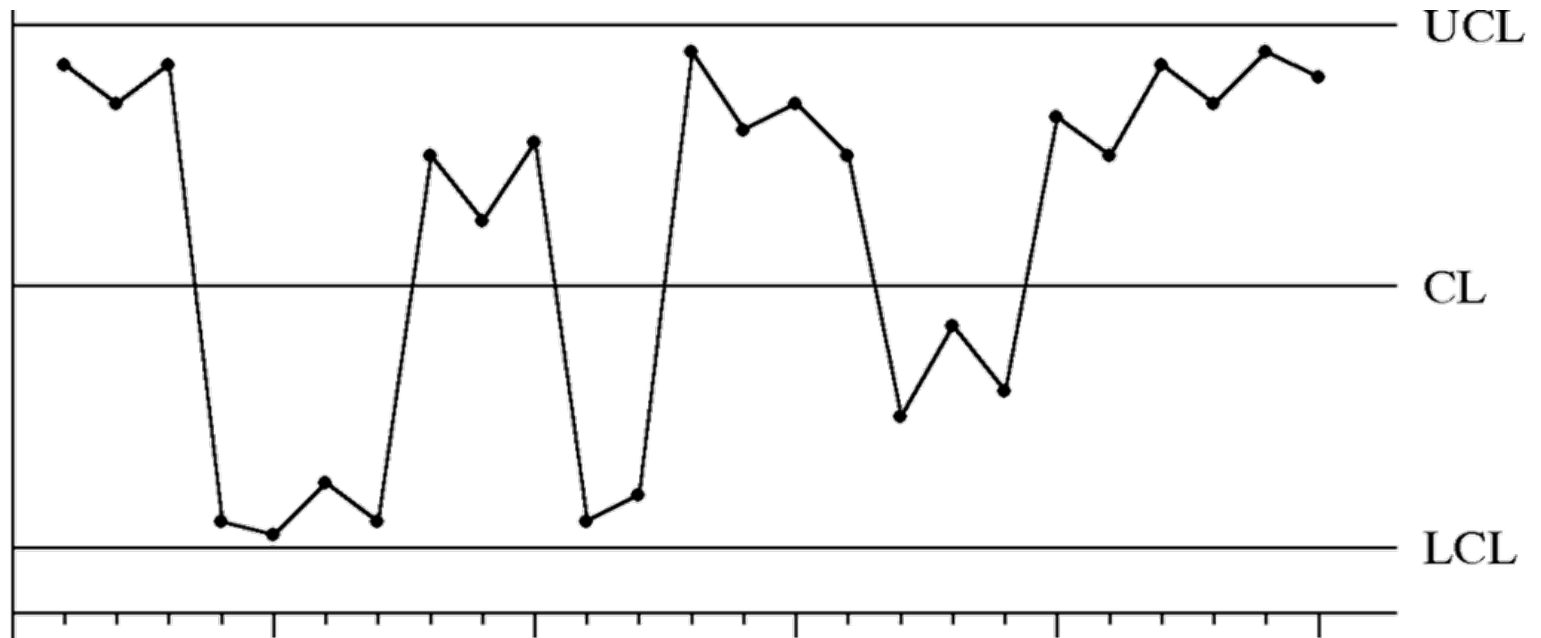
不合理抽樣,季節變化,作業員疲勞 or 溫度變化,...

系統性變化

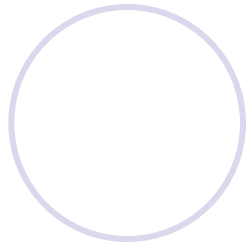
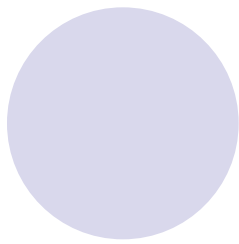


不合理抽樣

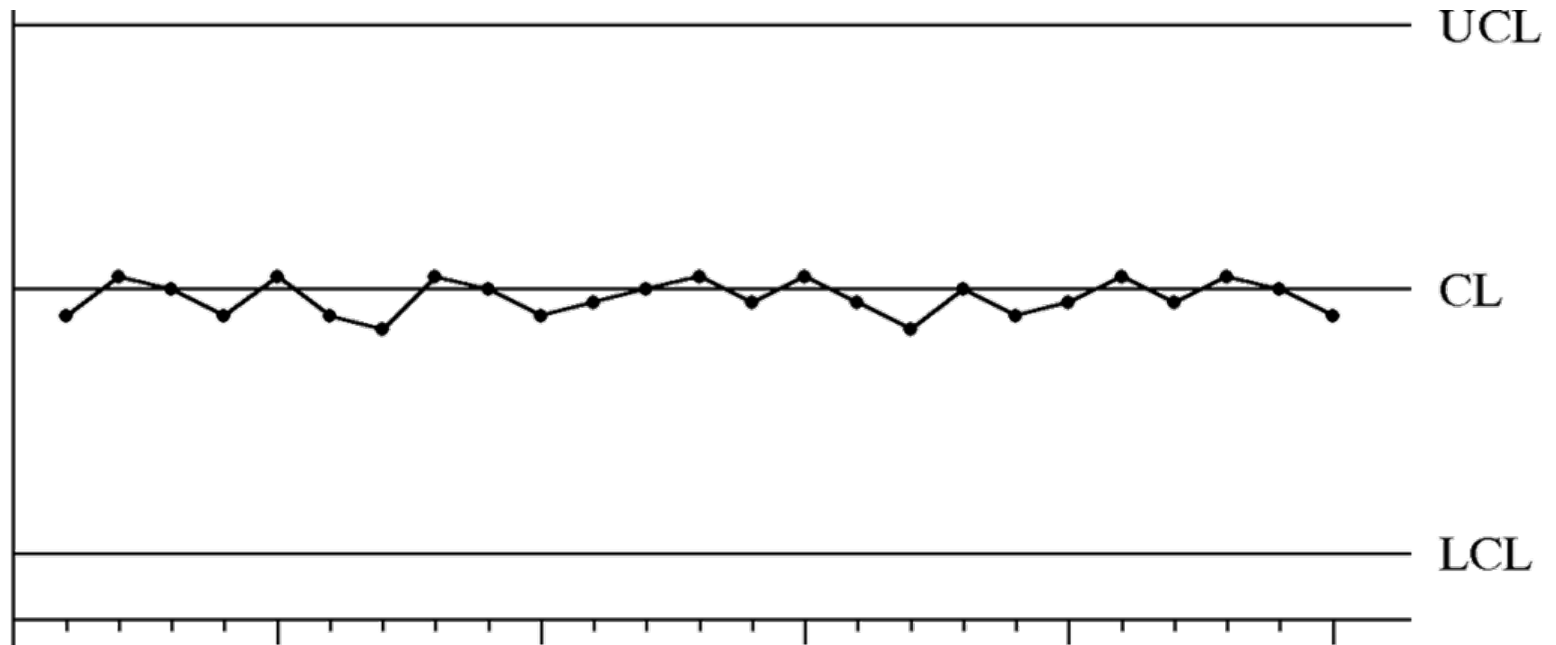
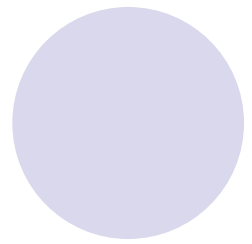
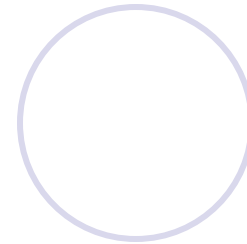
混合變化



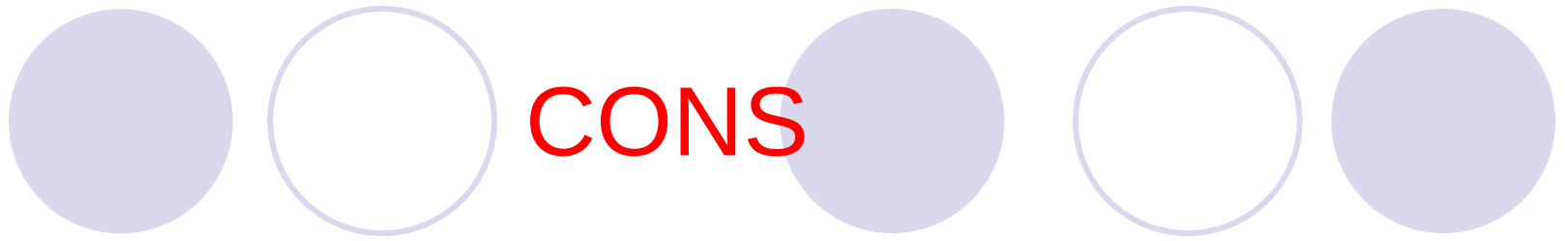
不合理抽樣
(數據來自兩個有交集之分配)



層別變化



不合理抽樣
or 錯誤的管制界限



- Shewhart charts+區域檢定的法則
- +其他檢定的法則
- 膨脹錯誤警訊率(alpha)

數據種類決定管制圖類型

- 1.計量值：品質特性可以計量或連續尺度表示，如：長度、重量、強度、...
- 2.計數值：如不合格數，通過數，缺點數...

計量值:計量管制圖,Xbar-R, Xbar-S charts
X-MR charts

計數值:計數管制圖,np, p, c, u charts

8.2

$\bar{X}$

— MR charts

- 偵測in-control 平均值,變異數 or 二者
- 是否 發生變動

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

- μ, σ^2 未知

- 如何估計?

$m (\geq 25)$ 組樣本, 樣本大小 n

No	x_1	x_2	$x_3 \dots x_n$	$\bar{X}$	R
1	x_{11}	x_{12}	$x_{13} \dots x_{1n}$	$\bar{x}_1$	R_1
2	x_{21}	x_{22}	$x_{23} \dots x_{2n}$	$\bar{x}_2$	R_2
...					
m	x_{m1}	x_{m2}	$x_{m3} \dots x_{mn}$	$\bar{x}_m$	R_m

$\bar{\bar{X}}$ $\bar{R}$

如何估計 μ, σ^2

?

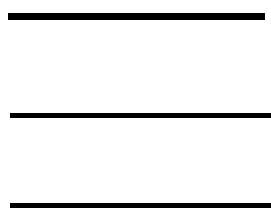
$$\overline{\overline{X}} \text{ ----- } \mu,$$

$$\frac{\overline{R}}{d_2} \text{ ---- } \sigma^2$$

$\overline{X}$ — MR charts

Trial charts

R chart:



$$D_4 \overline{R}$$

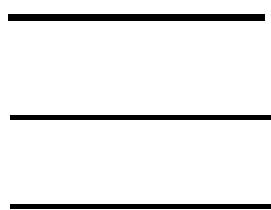
$$\overline{R}$$

D_4 , D_3 值決定於n

$$D_3 \overline{R}$$

$\overline{X}$

chart:



$$\overline{\overline{X}} + A_2 \overline{R}$$

$$\overline{\overline{X}}$$

A2 值決定於n

$$\overline{\overline{X}} - A_2 \overline{R}$$

點子隨機分布(1)

- Phase I :
- 若點子 $\bar{x}$ and R_i , $i=1,2,3,\dots,m$,隨機分布於
- $\bar{X}$ – MR charts
- **samples from in-control process**
- 則建立的 $\bar{X}$ – MR charts 可用以追蹤未來製程
- Phase II
- 以建立的 $\bar{X}$ – MR charts 追蹤製程

點子出界或不隨機分布(2)

- Phase I :
- 若點子 $\bar{X}$ and R_i , $i=1,2,3,\dots,m$,出界或不隨機分布於 $\bar{X}$ — **MR charts**, 找是否受**SC**影響,若是出界樣本刪除,再用剩餘樣本資料重新算 $\bar{X}$ 和 R 和
- 更新 $\bar{X}$ — **MR charts** 的 **UCL and LCL**
- 直到剩餘點子 $\bar{x}$ and R_i , $i=1,2,3,\dots,m$,隨機分布.
- Phase II
- 則建立的 $\bar{X}$ — **MR charts** 可用以追蹤製程

[例] 品質工程師欲以 $\bar{X}$ -R 管制圖追蹤製程中的E型物內徑是否在管制狀態，是以自3/12~3/16分別由製程中抽樣，每日抽取六組樣本。表陳列30組E型物內徑的樣本資料，每組樣本有5個觀察值，其測定單位為（1 =0.001mm）。E型物內徑的USL=5.0615, LSL=5.0645，且T=5.063。請同時計算製程之不良率。

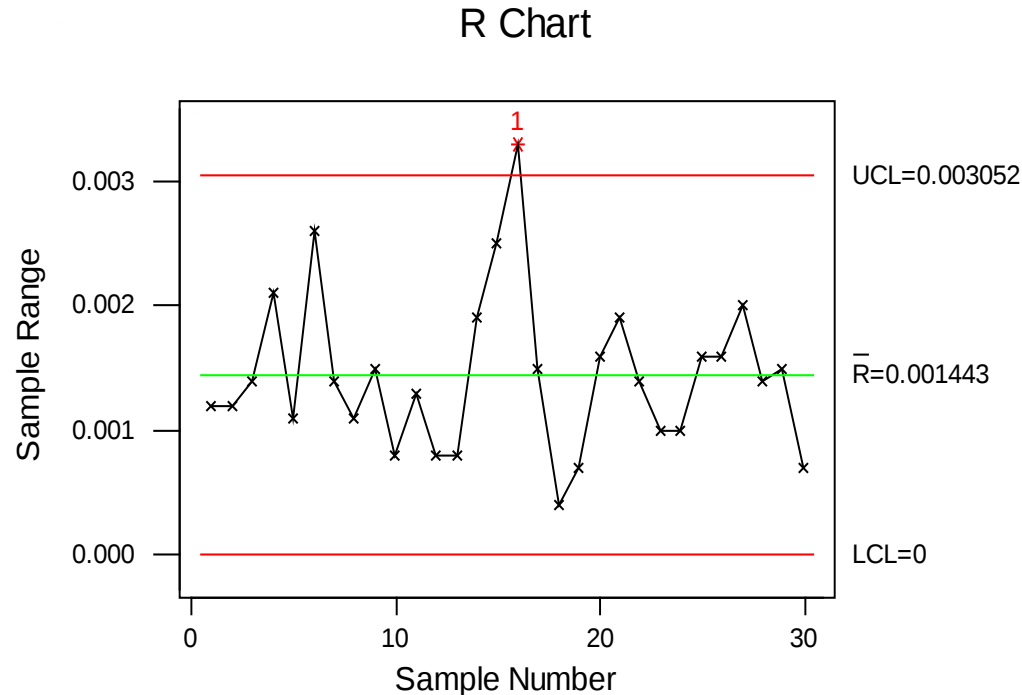
- 首先，計算R圖中的 $\bar{R} = 0.001443$.
- 本例是n=5，故我們從附表一可以得到 $D_3=0$ 和 $D_4=2.114$ 因此，R圖之上下管制界限與中心線為：

- $$UCL = \bar{R} + 3\frac{d_3}{d_2}\bar{R} = D_4\bar{R} = 2.114(0.001443) = 0.00305$$
- $$CL = \bar{R} = 0.001443$$
- $$LCL = \bar{R} - 3\frac{d_3}{d_2}\bar{R} = D_3\bar{R} = 0(0.001443) = 0$$

繪製R圖

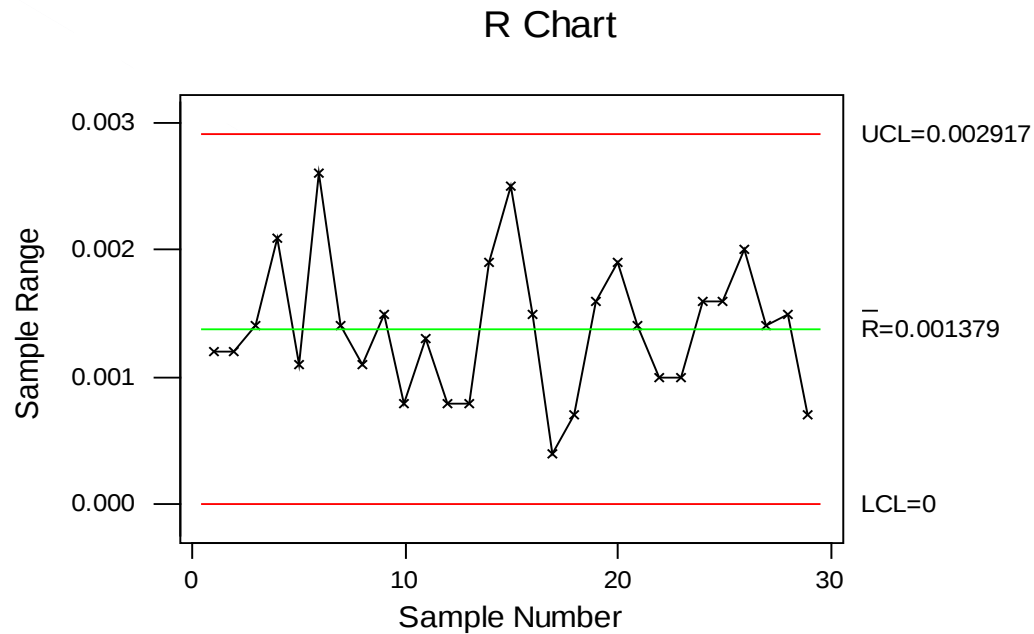
表：30組觀察值

No.	x1	x2	x3	x4	x5	$\bar{x}$	Range
1	5.0629	5.0636	5.0640	5.0628	5.0636	5.06338	0.0012
2	5.0630	5.0631	5.0622	5.0634	5.0631	5.06296	0.0012
3	5.0628	5.0631	5.0633	5.0619	5.0631	5.06284	0.0014
4	5.0634	5.0630	5.0631	5.0613	5.0630	5.06276	0.0021
5	5.0619	5.0628	5.0630	5.0629	5.0628	5.06268	0.0011
6	5.0613	5.0629	5.0634	5.0639	5.0622	5.06274	0.0026
7	5.0630	5.0639	5.0625	5.0627	5.0633	5.06308	0.0014
8	5.0628	5.0627	5.0622	5.0626	5.0633	5.06272	0.0011
9	5.0623	5.0626	5.0633	5.0631	5.0638	5.06302	0.0015
10	5.0631	5.0631	5.0633	5.0630	5.0638	5.06326	0.0008
11	5.0635	5.0630	5.0638	5.0630	5.0625	5.06316	0.0013
12	5.0623	5.0630	5.0630	5.0631	5.0630	5.06288	0.0008
13	5.0635	5.0631	5.0630	5.0632	5.0627	5.06310	0.0008
14	5.0645	5.0640	5.0631	5.0630	5.0626	5.06344	0.0019
15	5.0619	5.0644	5.0632	5.0644	5.0631	5.06340	0.0025
16	5.0631	5.0660	5.0630	5.0627	5.0631	5.06358	0.0033
17	5.0616	5.0623	5.0631	5.0623	5.0626	5.06238	0.0015
18	5.0630	5.0630	5.0626	5.0630	5.0629	5.06290	0.0004
19	5.0636	5.0631	5.0629	5.0630	5.0629	5.06310	0.0007
20	5.0640	5.0635	5.0629	5.0631	5.0645	5.06360	0.0016
21	5.0628	5.0625	5.0616	5.0635	5.0619	5.06246	0.0019
22	5.0615	5.0625	5.0619	5.0623	5.0629	5.06222	0.0014
23	5.0630	5.0632	5.0630	5.0629	5.0639	5.06320	0.0010
24	5.0635	5.0629	5.0635	5.0639	5.0629	5.06334	0.0010
25	5.0623	5.0629	5.0630	5.0629	5.0639	5.06300	0.0016
26	5.0629	5.0630	5.0645	5.0639	5.0629	5.06344	0.0016
27	5.0639	5.0631	5.0619	5.0629	5.0639	5.06314	0.0020
28	5.0627	5.0626	5.0631	5.0639	5.0625	5.06296	0.0014
29	5.0626	5.0629	5.0616	5.0631	5.0625	5.06254	0.0015
30	5.0631	5.0629	5.0630	5.0625	5.0632	5.06294	0.0007
經濟部標準局SPC2013政治大學楊素芬特聘教授							128
						$\bar{X}$ 5.06301	$\bar{R}$ 0.001443



發現第**16**筆跳出管制上限之外，經查發現機器失控造成這就表示第**16**點是製程失控下得到的資料，因此我們需要對試用管制圖作修正。

修正的步驟是先把有跳出管制上限的第**16**筆樣本資料去除，然後再用剩餘的**29**組樣本資料繪製R圖。



圖：修正後之R圖

沒有點跳出管制界限外，並且利用西方電器法則的檢查，點的分佈是隨機的，顯示製程變異數是穩定的。

接著，繪製 Xbar chart。 首先計算： $\bar{x} = 5.06301$

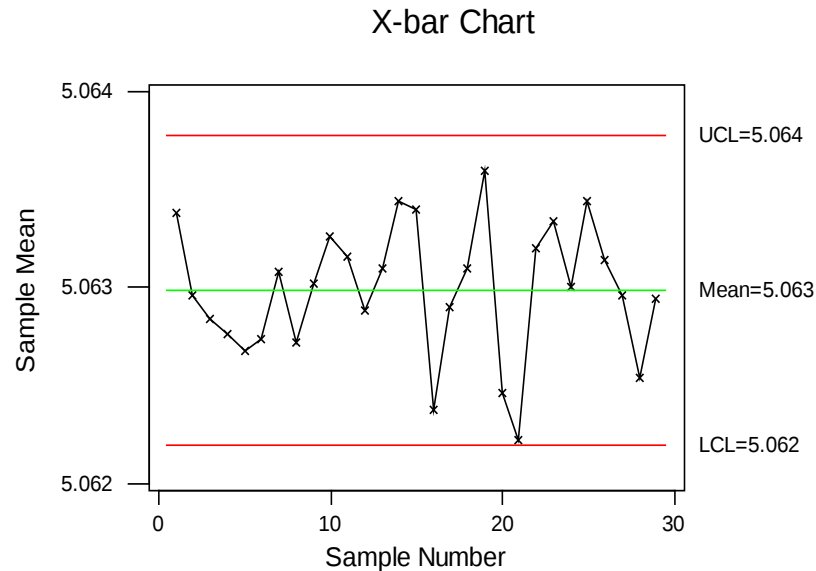
本例 $n=5$ ，查附表一後得到 $A_2=0.577$ 。

因此，Xbar 圖之管制上下界與中心線為：

- $UCL = \bar{x} + A_2 \bar{R} = 5.06301 + 0.577(0.001379) = 5.0638$
- $CL = \bar{x} = 5.06301$
- $LCL = \bar{x} - A_2 \bar{R} = 5.06301 - 0.577(0.001379) = 5.0622$

- 繪製 Xbar圖：

- 沒有點跳出管制界限外
- ，並且利用西方電器法則的檢查，點的分佈是隨機的，這表示以上的製程平均值是穩定的。



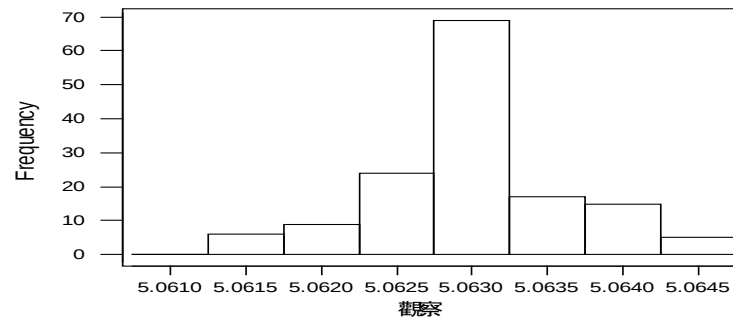
- 因此我們可以追蹤未來製程的 $\bar{X}$ 和 R 管制圖之管制界限為

- $UCL_{\bar{X}} = 5.064$ $UCL_R = 0.002917$
- $CL_{\bar{X}} = 5.063$ $CL_R = 0.001379$
- $LCL_{\bar{X}} = 5.062$ $LCL_R = 0$

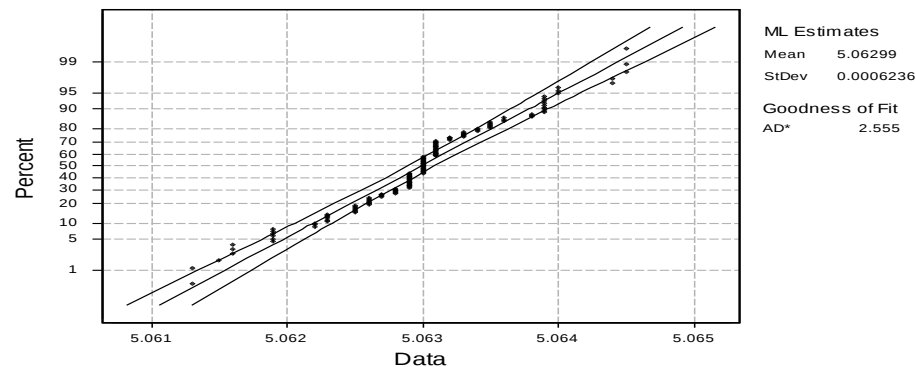
- 追蹤製程:
- 每隔 h 小時取一新樣本 $n=5$, 計算 $\bar{R}$ and $\bar{X}$, 點於 R 管制圖和 $\bar{X}$ 管制圖, 若出界, 搜尋是否受某特殊因影響,
- 是受某特殊因影響, 則採取排除行動, 製程回復穩定後, 隔 h 小時再取一新樣本追蹤.
- 非受某特殊因影響, 則不處理, 隔 h 小時再取一新樣本追蹤.

製程穩定下的製程能力

為了確定其分配是否為常態，我們先要對29個樣本組的資料作直方圖或常態機率圖



Normal Probability Plot for 觀察
ML Estimates - 95% CI



● 由圖可以知道，製程的分配為常態。

● 因此，X在製程穩定下的分配為：

●

$$X \sim N(\bar{x}, (\bar{R} / d_2)^2)$$

●

$$X \sim N(5.06301, (\frac{0.001379}{2.326} = 0.00059)^2)$$

$$P(\text{不良}) = P(X < 5.0615 \text{ or } X > 5.0645 | X \sim (5.06301, (0.00059)^2))$$

●

$$= 1 - P(5.0615 < X < 5.0645 | X \sim N(5.06301, (0.00059)^2))$$

●

$$= 1 - P(-2.56 < Z < 2.53) = 1 - (0.9943 - (1 - 0.99477)) = 0.01093$$

●

$$= 10930 \text{PPM}$$

製程能力不佳, 需改善

8.3 $\overline{X}$ – S charts

m (≥ 25)組樣本, 樣本大小 n

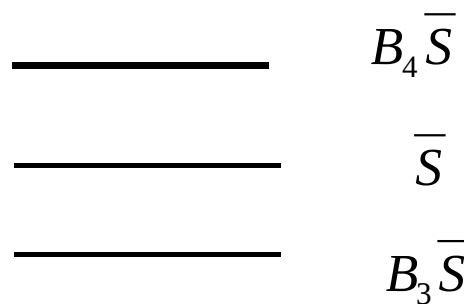
No	x_1	x_2	$x_3 \dots x_n$	$\overline{X}$	S
1	x_{11}	x_{12}	$x_{13} \dots x_{1n}$	$\overline{x}_1$	S_1
2	x_{21}	x_{22}	$x_{23} \dots x_{2n}$	$\overline{x}_2$	S_2
...					
m	x_{m1}	x_{m2}	$x_{m3} \dots x_{mn}$	$\overline{x}_m$	S_m

$$\overline{\overline{X}} \quad \overline{S}$$

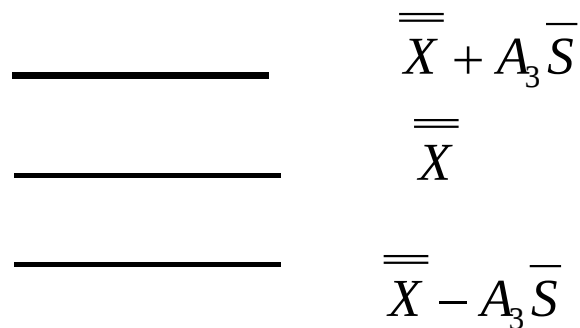
8.3

$\bar{X} - S$ charts

S chart:



$\bar{X}$ chart:



$$\begin{aligned} \bar{\bar{X}} & \text{-----} \mu, \\ \frac{\bar{S}}{c_4} & \text{---} \sigma^2 \end{aligned}$$

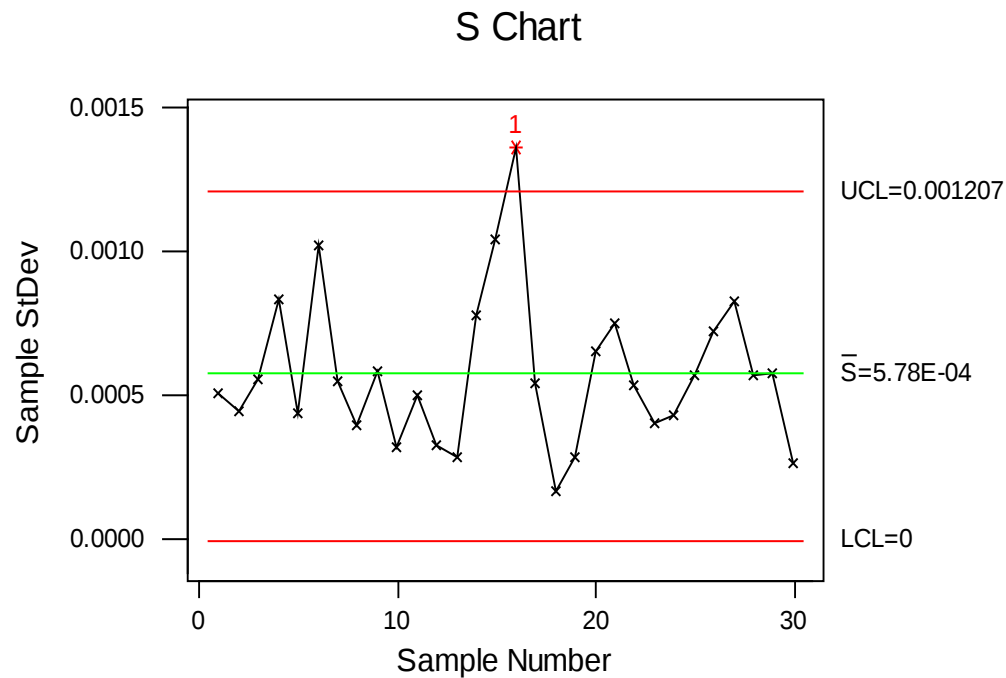
[同例一]

No.	x1	x2	x3	x4	x5	$\bar{X}$	S
1	5.0629	5.0636	5.0640	5.0628	5.0636	5.06338	0.0005119
2	5.0630	5.0631	5.0622	5.0634	5.0631	5.06296	0.0004506
3	5.0628	5.0631	5.0633	5.0619	5.0631	5.06284	0.0005550
4	5.0634	5.0630	5.0631	5.0613	5.0630	5.06276	0.0008325
5	5.0619	5.0628	5.0630	5.0629	5.0628	5.06268	0.0004438
6	5.0613	5.0629	5.0634	5.0639	5.0622	5.06274	0.0010213
7	5.0630	5.0639	5.0625	5.0627	5.0633	5.06308	0.0005495
8	5.0628	5.0627	5.0622	5.0626	5.0633	5.06272	0.0003962
9	5.0623	5.0626	5.0633	5.0631	5.0638	5.06302	0.0005891
10	5.0631	5.0631	5.0633	5.0630	5.0638	5.06326	0.0003209
11	5.0635	5.0630	5.0638	5.0630	5.0625	5.06316	0.0005030
12	5.0623	5.0630	5.0630	5.0631	5.0630	5.06288	0.0003271
13	5.0635	5.0631	5.0630	5.0632	5.0627	5.06310	0.0002915
14	5.0645	5.0640	5.0631	5.0630	5.0626	5.06344	0.0007829
15	5.0619	5.0644	5.0632	5.0644	5.0631	5.06340	0.0010464
16	5.0631	5.0660	5.0630	5.0627	5.0631	5.06358	0.0013627
17	5.0616	5.0623	5.0631	5.0623	5.0626	5.06238	0.0005450
18	5.0630	5.0630	5.0626	5.0630	5.0629	5.06290	0.0001732
19	5.0636	5.0631	5.0629	5.0630	5.0629	5.06310	0.0002915
20	5.0640	5.0635	5.0629	5.0631	5.0645	5.06360	0.0006557
21	5.0628	5.0625	5.0616	5.0635	5.0619	5.06246	0.0007503
22	5.0615	5.0625	5.0619	5.0623	5.0629	5.06222	0.0005404
23	5.0630	5.0632	5.0630	5.0629	5.0639	5.06320	0.0004062
24	5.0635	5.0629	5.0635	5.0639	5.0629	5.06334	0.0004336
25	5.0623	5.0629	5.0630	5.0629	5.0639	5.06300	0.0005745
26	5.0629	5.0630	5.0645	5.0639	5.0629	5.06344	0.0007266
27	5.0639	5.0631	5.0619	5.0629	5.0639	5.06314	0.0008295
28	5.0627	5.0626	5.0631	5.0639	5.0625	5.06296	0.0005727
29	5.0626	5.0629	5.0616	5.0631	5.0625	5.06254	0.0005771
30	5.0631	5.0629	5.0630	5.0625	5.0632	5.06294	0.0002702
經濟品標準局SPC2019政治大學楊素芬特聘教授						$\bar{X}$	$\bar{S}$
						5.06301	0.0005777

$$UCL = B_4 \bar{s} = 2.089(0.000578) = 0.001207$$

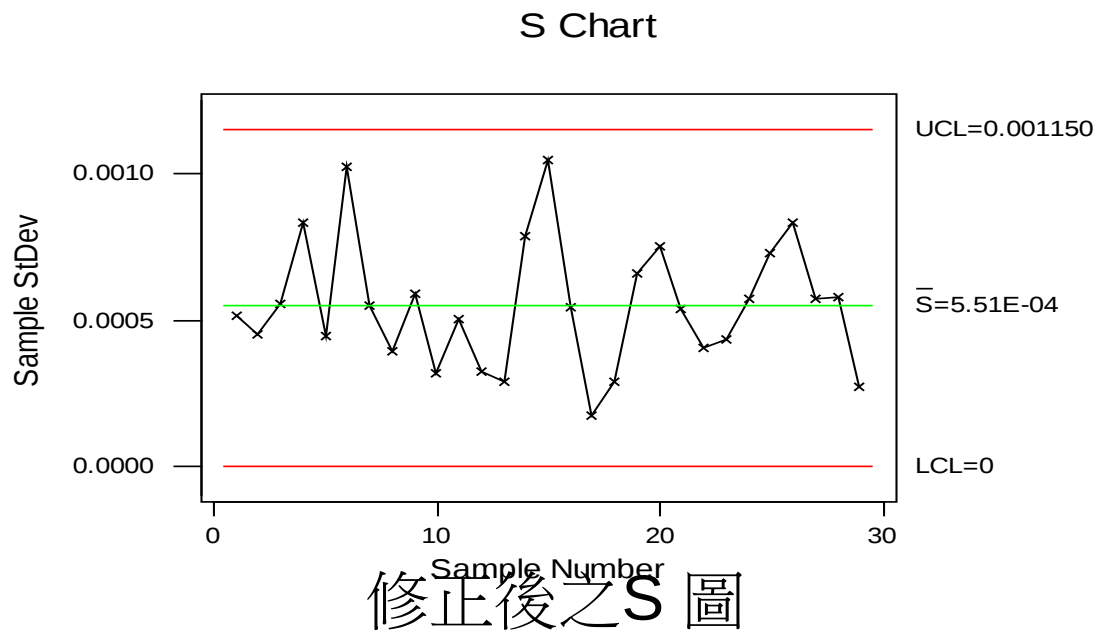
$$CL = 0.000578$$

$$LCL = B_3 \bar{s} = 0(0.000578) = 0$$



S 圖

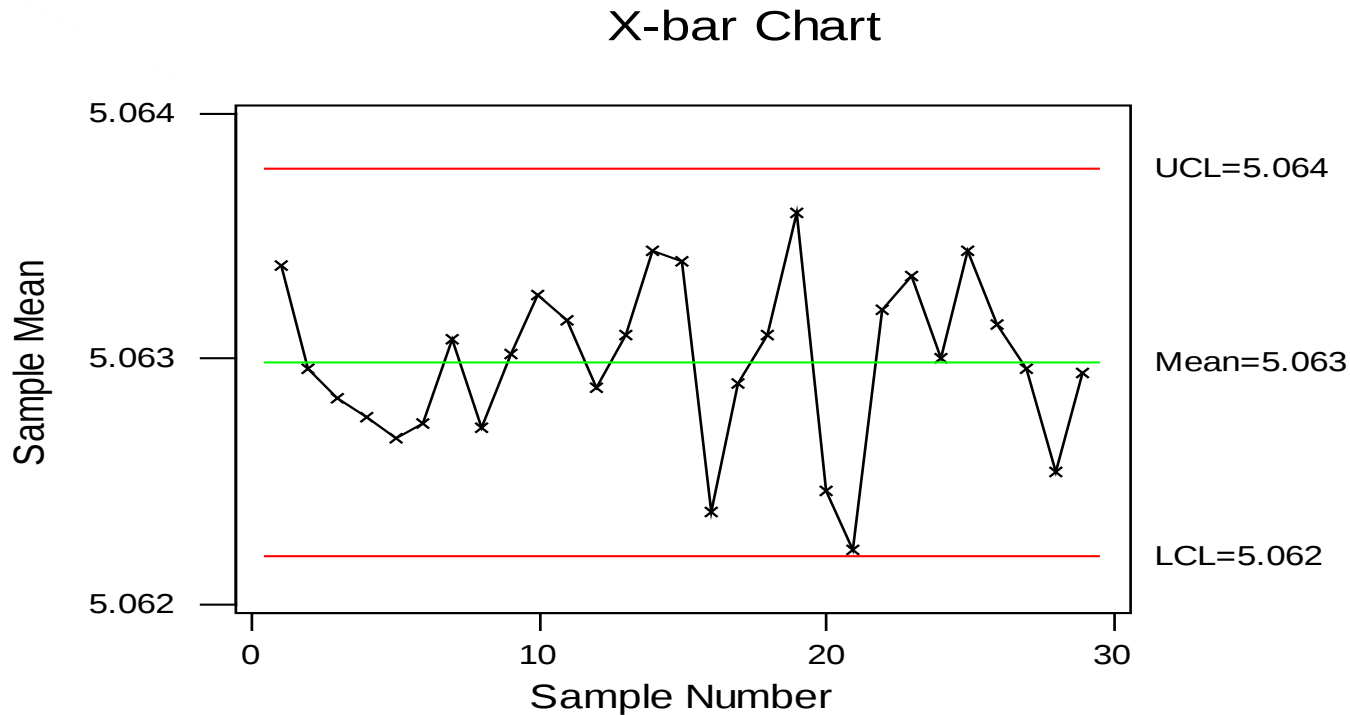
第16筆樣本資料去除



沒有點跳出管制界限外，並且利用西方電器法則的檢查，點的分佈是隨機的，這表示以上的製程變異數是穩定的

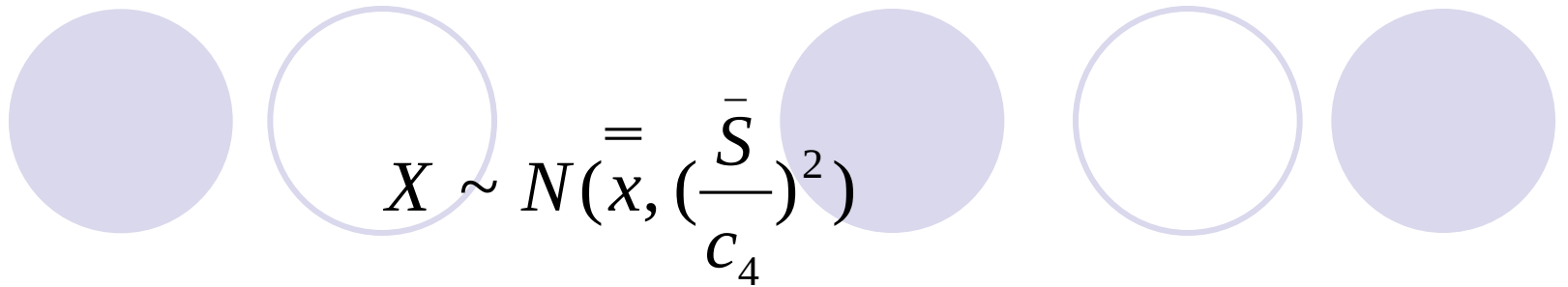
用29筆樣本資料建立X-bar管制圖

- $UCL = \bar{\bar{x}} + A_3 \bar{s}$
- $= 5.06301 + 1.427(0.000551) = 5.064$
- $CL = \bar{\bar{x}} = 5.06301$
- $LCL = \bar{\bar{x}} - A_3 \bar{s}$
- $= 5.06301 - 1.427(0.000551) = 5.062$



沒有點跳出管制界限外，並且利用西方電器法則的檢查，點的分佈是隨機的，這表示以上的製程平均值是穩定的

X-bar and S charts資料來自穩定製程,管制圖可用以追蹤未來製程



$$X \sim N(5.06301, (0.000586)^2)$$

$$\begin{aligned} P(\text{不良}) &= P(X < 5.0615 \text{ or } X > 5.0645 | X \sim N(5.06301, (0.000586)^2)) \\ &= 1 - P(5.0615 < X < 5.0645 | X \sim N(5.06301, (0.000586)^2)) \\ &= 1 - P(-2.577 < Z < 2.543) = 1 - (0.994 - (1 - 0.995)) = 0.011 \end{aligned}$$

8.4 X- MR charts (n=1)

No.	X	MR	
1	x1		
2	x2	MR1= x2-x1	n=2
3	x3	MR2= x3-x2	
...			
M	xm	MR _{m-1} = X _m -X _{m-1}	
	xbar	MR-bar	

8.4 X- MR charts (n=1)

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\overline{X} \text{ ----- } \mu$$

$$\overline{MR} / d_2 \text{ ----- } \sigma$$

MR chart:

$$D_4 \overline{MR}$$

$$\overline{MR} \quad D_3, D_4 \text{ 值決定於 } n=2$$

$$D_3 \overline{MR}$$

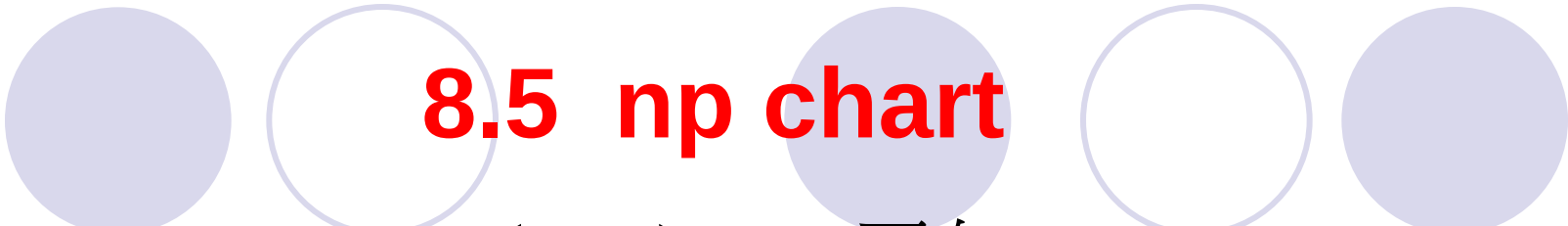
chart:

$$\overline{X} + E_2 \overline{MR}$$

$$\overline{X}$$

$$E_2 = 2.66$$

$$\overline{X} - E_2 \overline{MR}$$



8.5 np chart

$$X \sim (n, p) \quad p \text{ 已知}$$

$$E(X) = np \quad V(X) = np(1 - p)$$

$$UCL = np + 3\sqrt{np(1 - p)}$$

$$LCL = np - 3\sqrt{np(1 - p)}$$

8.5 np chart

$X \sim (n, p)$ p 未知

No	n	X	$\hat{p}$
1	n	x1	$\hat{p}_1$
2	n	x2	$\hat{p}_2$
...			
m	n	Xm	$\hat{P}_m$
			$\bar{P}$

np chart

$X \sim B(n, p)$, p 未知, $\bar{P} \text{ — — — — } p$

$$\begin{array}{l} \text{—————} \quad n\bar{P} + 3\sqrt{n\bar{P}(1-\bar{P})} \\ \text{—————} \quad n\bar{P} \\ \text{—————} \quad n\bar{P} - 3\sqrt{n\bar{P}(1-\bar{P})} \end{array}$$

標準化管制圖

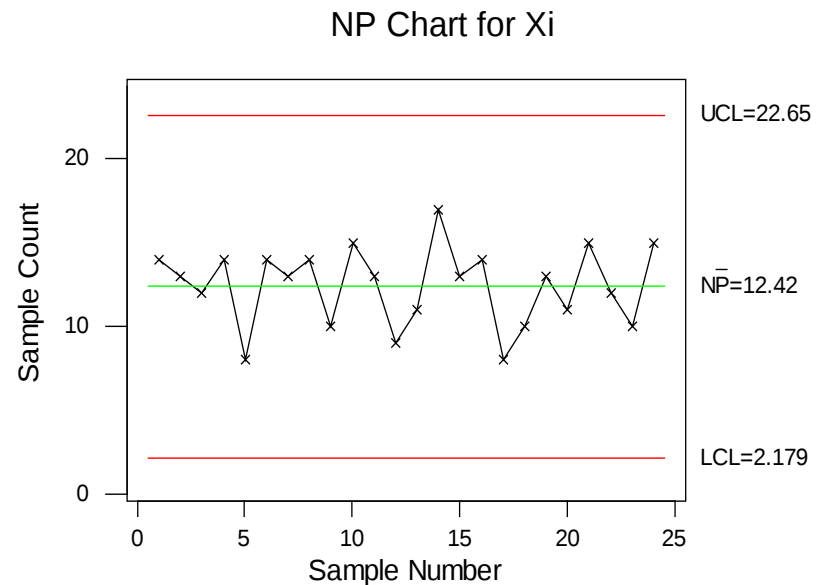
$$Z_i = \frac{x_i - n\bar{p}}{\sqrt{n\bar{P}(1-\bar{P})}}$$

$$\begin{array}{l} \text{—————} \quad 3 \\ \text{—————} \quad 0 \\ \text{—————} \quad -3 \end{array}$$

欲知E型物的不合格數是否在管制狀態，是以由製程中抽取24組樣本資料,決定試用np管制圖
建立可以追蹤未來不合格數變化的np管制圖

組數	Xi	n
1	14	200
2	13	200
3	12	200
4	14	200
5	8	200
6	14	200
7	13	200
8	14	200
9	10	200
10	15	200
11	13	200
12	9	200
13	11	200
14	17	200
15	13	200
16	14	200
17	8	200
18	10	200
19	13	200
20	11	200
21	15	200
22	12	200
23	10	200
24	15	200

24組E型物的樣本資料



資料來自穩定製程,管制圖可用以
追蹤未來製程

$$\bar{P} = \frac{\sum Xi}{200 \times 24} = 0.0621$$

8.6 p chart

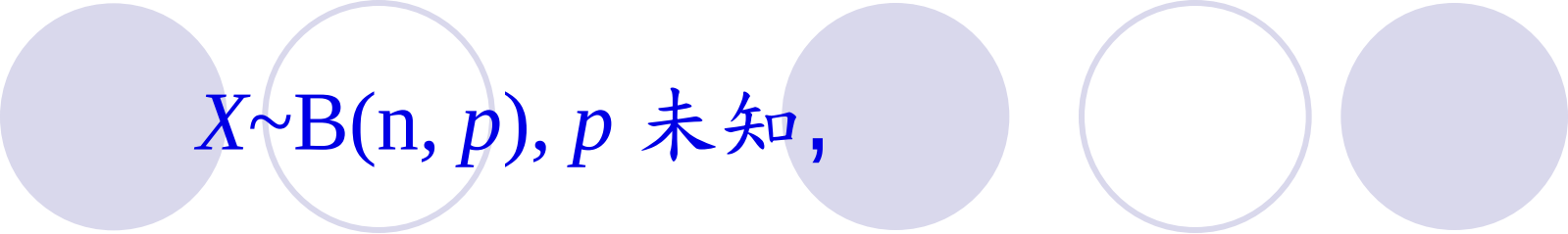
$$X \sim (n_i, p) \quad p \text{ 已知}$$

$$\hat{p} = X / n_i, \quad E(\hat{p}) = p, \quad V(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n_i}$$

$$UCL = p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$CL = p$$

$$LCL = p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n_i}}$$



$X \sim B(n, p), p \text{ 未知},$

$$\bar{P} \text{ --- } p$$

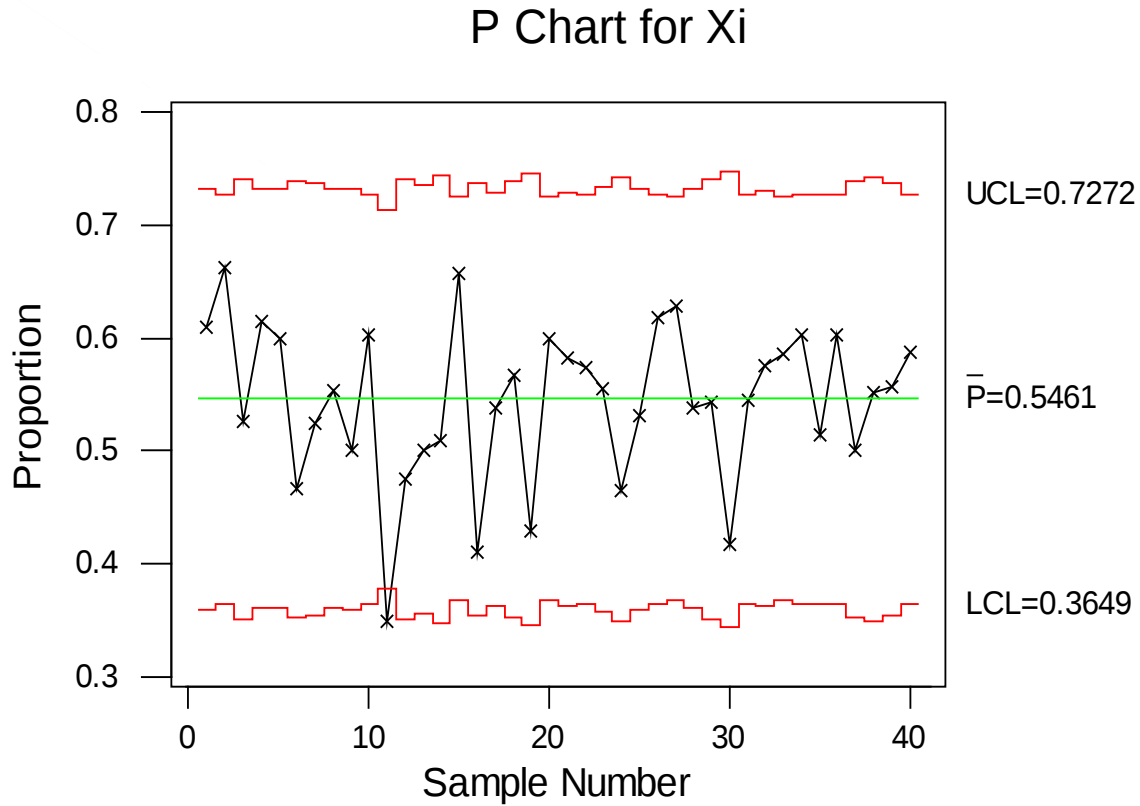
$$UCL = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n_i}}$$

$$CL = \bar{p}$$

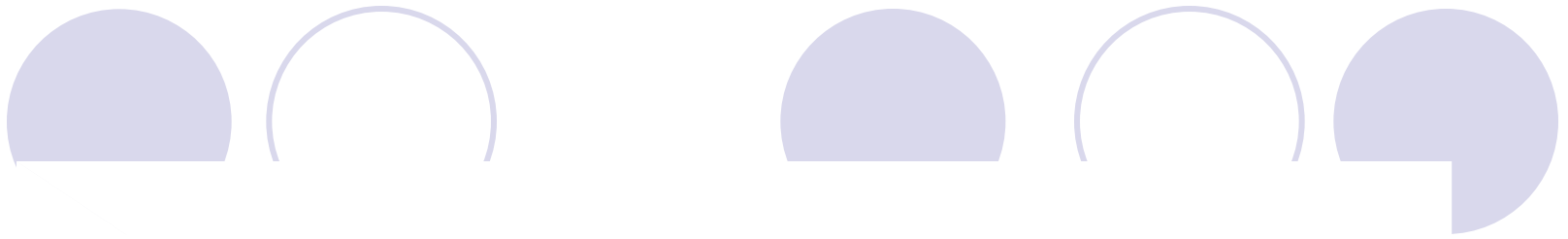
$$LCL = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n_i}}$$

Week	X_i	n_i	$P_i = \frac{X_i}{n_i}$	Week	X_i	n_i	$P_i = \frac{X_i}{n_i}$
1	39	64	0.609375	21	39	67	0.582090
2	45	68	0.661765	22	39	68	0.573529
3	31	59	0.525424	23	35	63	0.555556
4	40	65	0.615385	24	27	58	0.465517
5	39	65	0.600000	25	34	64	0.531250
6	28	60	0.466667	26	42	68	0.617647
7	32	61	0.524590	27	44	70	0.628571
8	35	65	0.538462	28	35	65	0.538462
9	32	64	0.500000	29	32	59	0.542373
10	41	68	0.602941	30	23	55	0.418182
11	28	80	0.350000	31	37	68	0.544118
12	28	59	0.474576	32	38	66	0.575758
13	31	62	0.500000	33	41	70	0.585714
14	29	57	0.508772	34	41	68	0.602941
15	46	70	0.657143	35	35	68	0.514706
16	25	61	0.409836	36	41	68	0.602941
17	36	67	0.537313	37	30	60	0.500000
18	34	60	0.566667	38	32	58	0.551724
19	24	56	0.428571	39	34	61	0.557377
20	42	70	0.600000	40	40	68	0.588235

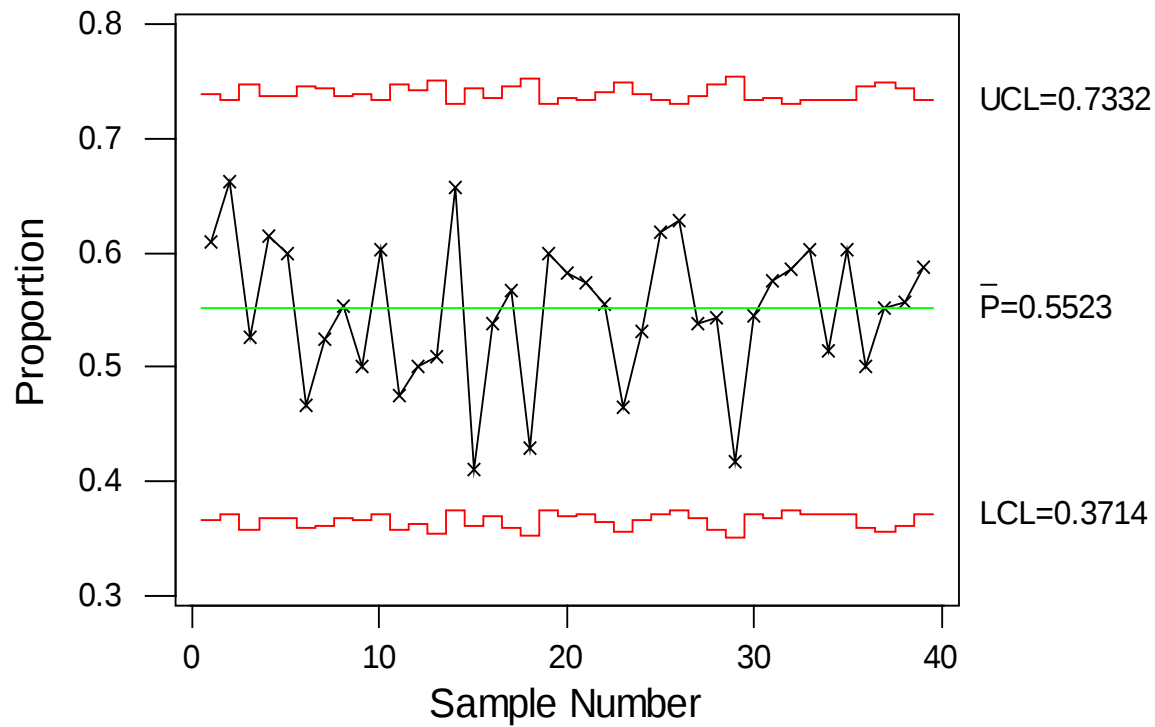
$$\bar{P} = \frac{\sum X_i}{\sum n_i} = 0.5461$$



第**11**筆資料出界,查受特殊因影響,
刪除第**11**點樣本資料後,重製管制圖

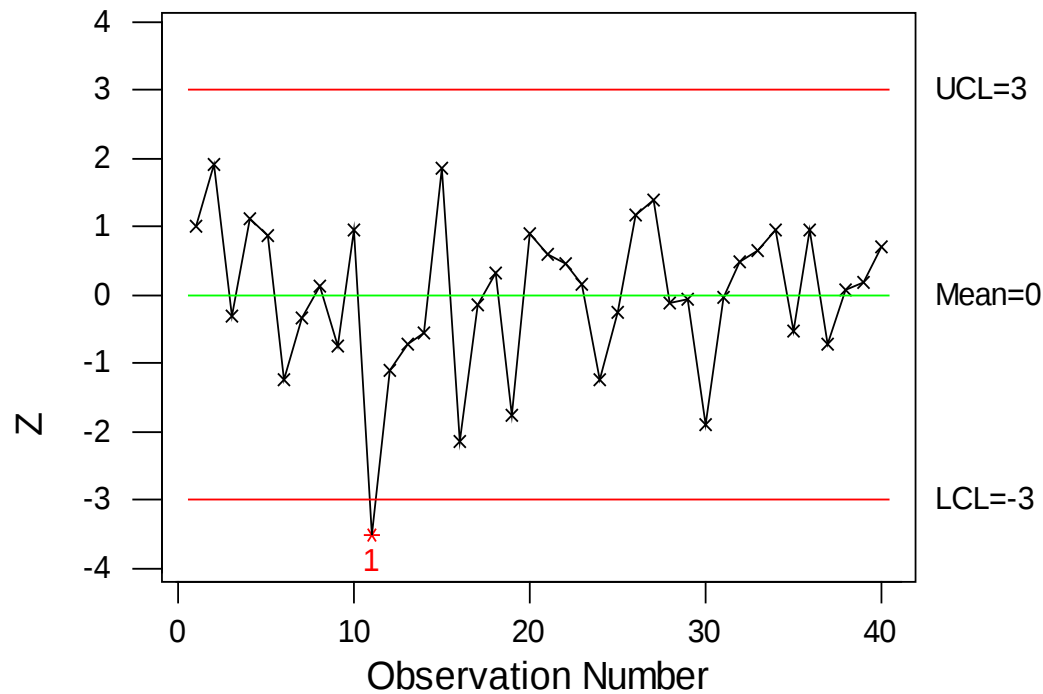


P Chart for Xi



標準化p chart

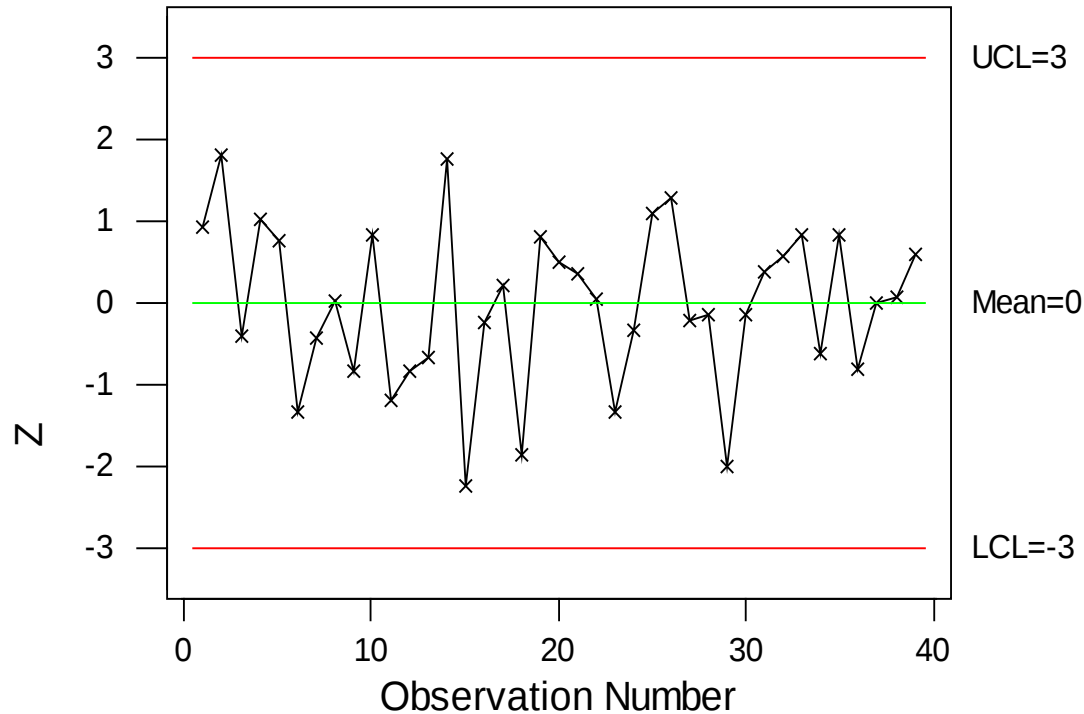
Standard P Chart



刪除第11點樣本資料後,重製管制圖

標準化p chart

Standard P Chart



資料來自穩定製程,管制圖可用以追蹤未來製程

8.7 c chart

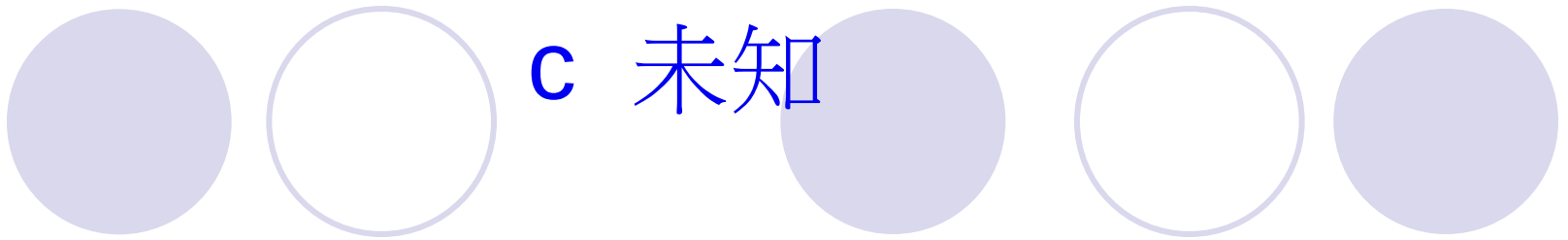
$$X \sim P_o(c) \quad c \text{ 已知}$$

$$E(X) = V(X) = c$$

$$UCL = c + 3\sqrt{c}$$

$$CL = c$$

$$LCL = c - 3\sqrt{c}$$



No	n	X
1	n	x1
2	n	x2
...		
m	n	Xm

$$\bar{\bar{c}} = \sum_{i=1}^m x_i / m$$

$$UCL = \bar{\bar{c}} + 3\sqrt{\bar{c}}$$

$$CL = \bar{\bar{c}}$$

$$LCL = \bar{\bar{c}} - 3\sqrt{\bar{c}}$$

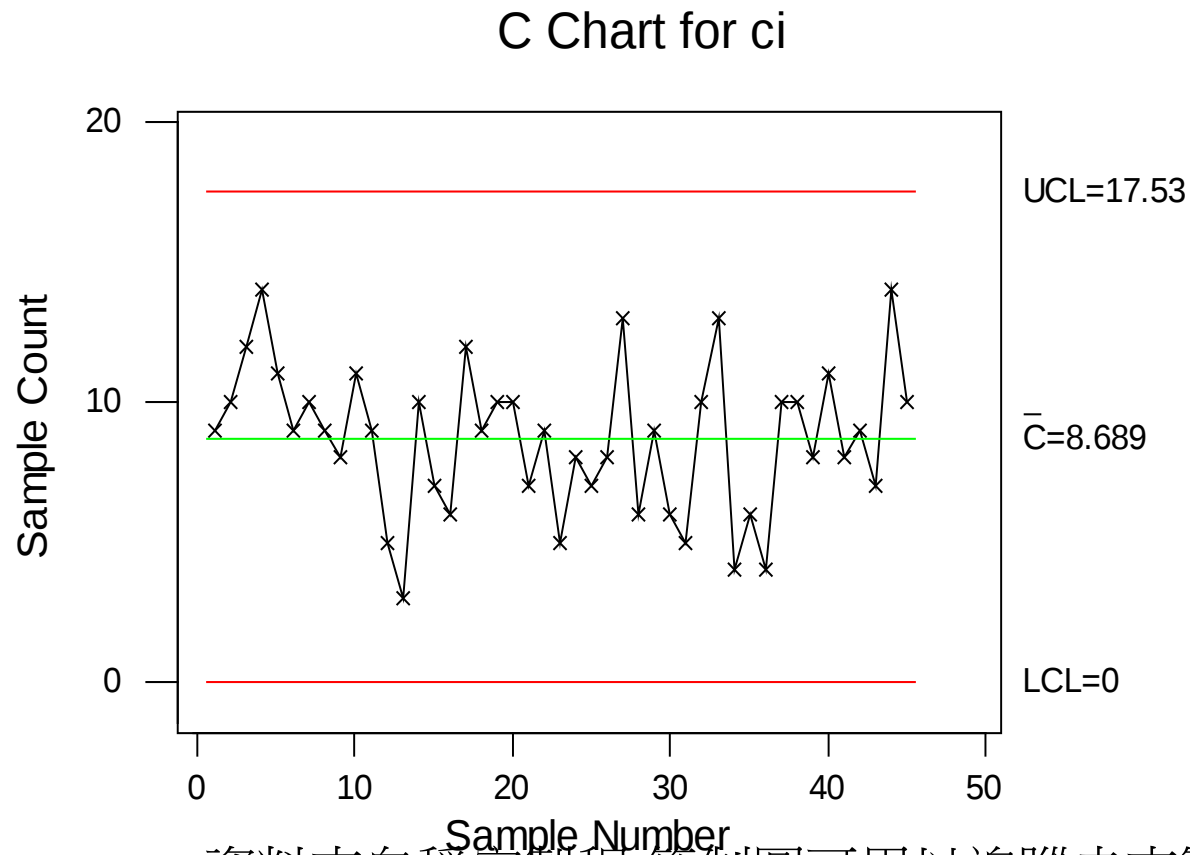
[例]欲知每頁紙張的打字錯字數是否在管制狀態，5月1日~6月15日每日抽取10頁打好的紙張檢查其錯字數。如表陳列錯字數的樣本資料。

(1)畫試用C管制圖 (2)決定可用以追蹤未來製程的C管制圖

Day i	Ci	Day i	Ci
1	9	24	5
2	10	25	8
3	12	26	7
4	14	27	8
5	11	28	13
6	9	29	6
7	10	30	9
8	9	31	6
9	11	32	5
10	8	33	10
11	11	34	13
12	9	35	4
13	5	36	6
14	3	37	4
15	10	38	10
16	7	39	10
17	6	40	8
18	12	41	11
19	9	42	8
20	10	43	9
21	10	44	7
22	7	45	14
23	9	46	10

$$\bar{C} = \frac{\sum Ci}{46} = 8.739$$

前面9點發生不隨機分佈的情形---連續9點在同一側---查第9點受特殊因影響,刪除第9點後,重製管制圖



資料來自穩定製程,管制圖可用以追蹤未來製程

8.8 u chart

$$X_i / n_i \sim P_o(u) \quad u \text{ 已知}$$

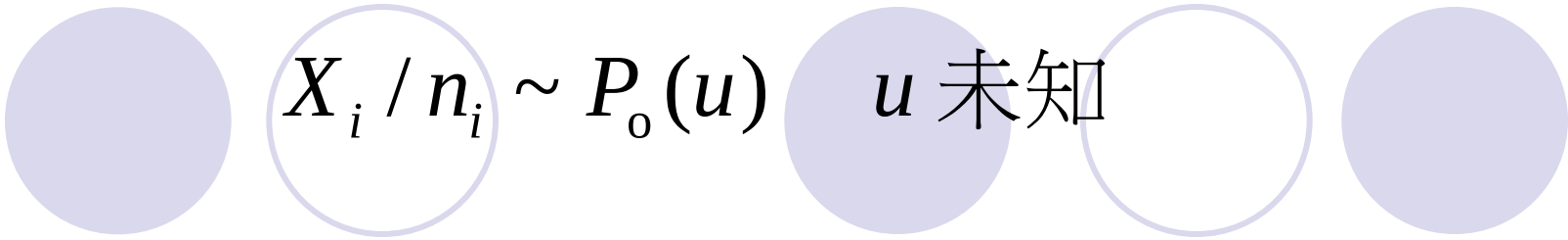
$$E(X_i / n_i) = u$$

$$V(X_i / n_i) = u / n_i$$

$$UCL = u + 3\sqrt{\frac{u}{n_i}}$$

$$CL = u$$

$$LCL = u - 3\sqrt{\frac{u}{n_i}}$$



$$X_i / n_i \sim P_o(u) \quad u \text{ 未知}$$

	No	n	X	ui
●	1	n1	x1	u1
●	2	n2	x2	u2
●	...			
●	m	n3	Xm	um

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^m u_i$$

$$UCL = \bar{u} + 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n_i}}$$

$$CL = \bar{u}$$

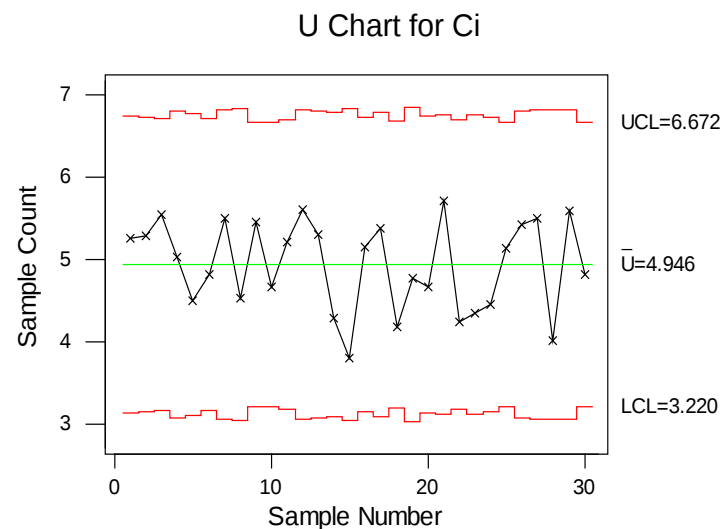
$$LCL = \bar{u} - 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n_i}}$$

[例]欲知布匹斑點數是否在管制狀態，是以每星期自製程中，隨機抽取長寬不相同之布匹檢驗其缺點數。表陳列布匹斑點數的樣本資料。

- (1)試畫出試用U管制圖(2)決定可用以追蹤未來製程的U管制圖之管制界限
(3) 畫出標準化U管制圖

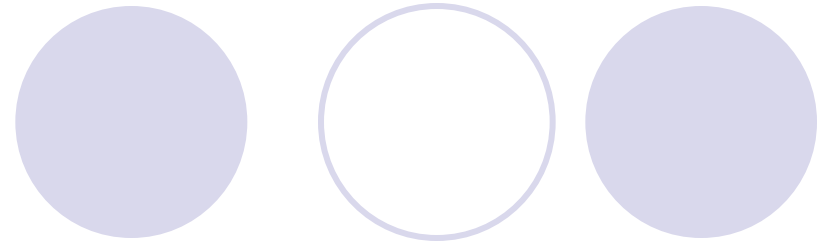
C_i

week	C_i	n_i	$U_i = \frac{C_i}{n_i}$
1	72	13.688	5.2600
2	73	13.780	5.29753
3	78	14.056	5.54923
4	64	12.695	5.04135
5	59	13.087	4.50829
6	68	14.083	4.82852
7	69	12.518	5.51206
8	56	12.342	4.53735
9	81	14.816	5.46706
10	70	14.958	4.67977
11	75	14.372	5.21848
12	71	12.649	5.61309
13	68	12.813	5.30711
14	56	13.027	4.29876
15	47	12.351	3.80536
16	72	13.941	5.16462
17	70	12.986	5.39042
18	61	14.580	4.18381
19	58	12.151	4.77327
20	64	13.709	4.66847
21	77	13.459	5.72108
22	61	14.366	4.24614
23	58	13.314	4.35632
24	62	13.897	4.46139
25	77	14.963	5.14603
26	69	12.707	5.43008
27	69	12.524	5.50942
28	50	12.461	4.01252
29	70	12.507	5.59687
30	72	14.945	4.81766

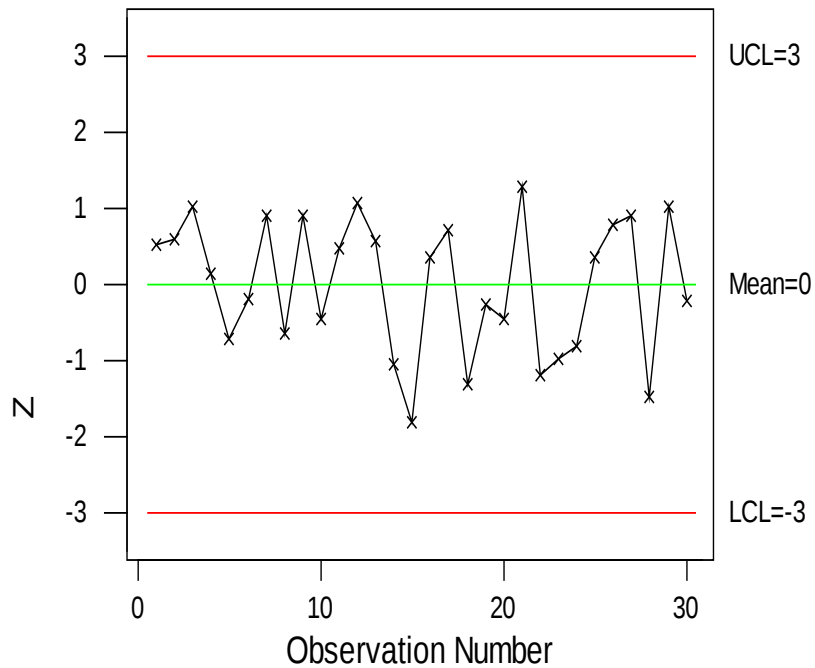


$$\bar{U} = \frac{\sum C_i}{\sum n_i} = 4.946$$

標準化u chart



Standard U Chart



$$Z = \frac{(u_i - \bar{u})}{\sqrt{\frac{\bar{u}}{n_i}}}$$

$$E(Z) = 0$$

$$V(Z) = 1$$



- 當流程數據以時間數列呈現時

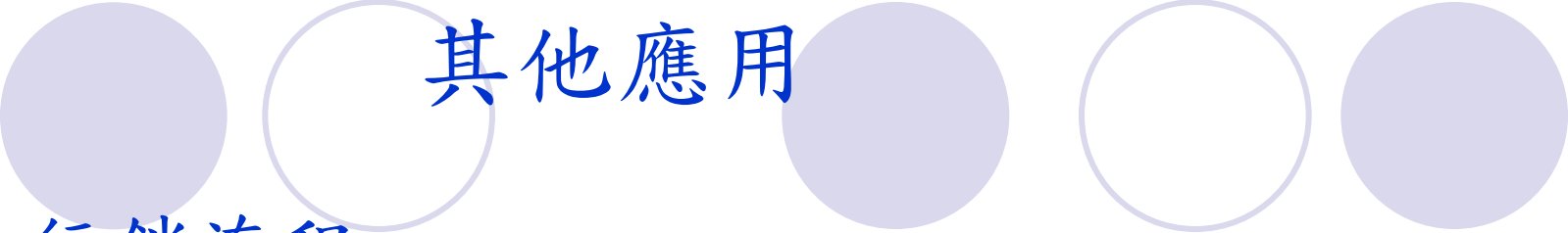
- 管制圖是

- (1)分析流程(or製程)是否穩定

- (2)變異是否減少

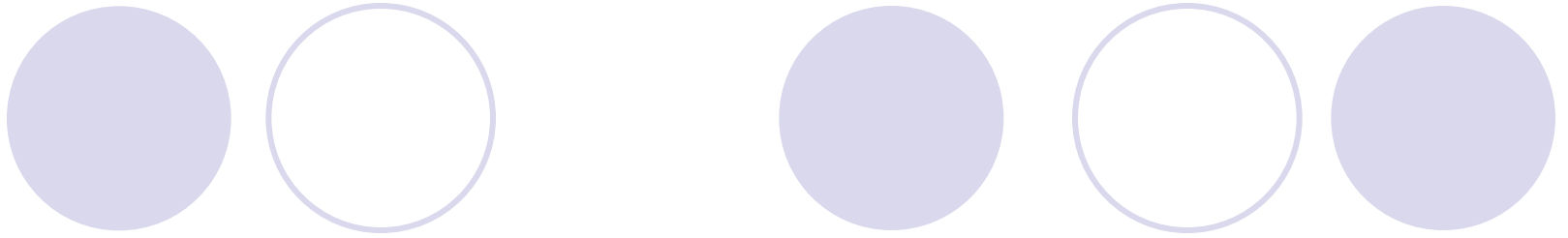
- (3)確認改善效果

- 簡易且有效的工具

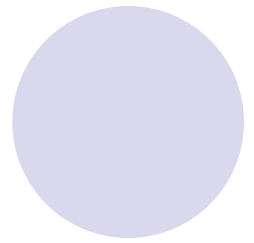
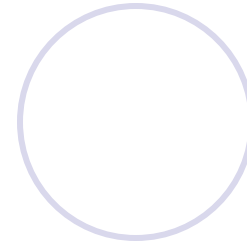
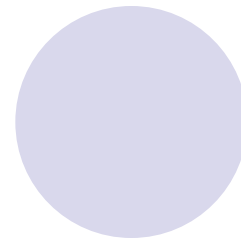
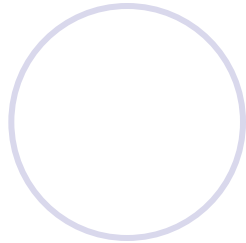
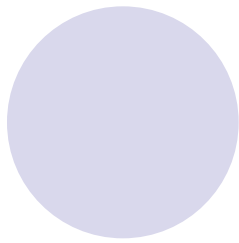


其他應用

- 1.行銷流程
- 2.製造流程
- 3.員工聘僱流程
- 4.顧客抱怨處理流程
- 5.教務工作流程
- 6.行政工作, 其他...
- 持續降低變異=提升品質=six sigma
- 持續降低變異+速度=lean six sigma



- 清楚的了解統計方法的原理
- (統計觀念)
- 及製程
- 才能正確的應用統計品管方法
- 使統計品管方法發揮最大的功效
- 有效管制和改善製程



Thank you

謝謝