材料抗拉強度量測不確定度與誤差分析問題的探討

經濟部標準檢驗局台南分局第一課

方冠權、郭晃銘、蔡森南

摘要

以往分析量測之總不確定度（又稱擴充不確定度）時，多是先找出各項誤差值，然後利用均方根法計算出一個數值，一般情況下就認為此數值即為量測的擴充不確定度。有時候會將此數值乘以一個修正因子後作為該量測的總不確定度。採用均方根法應該說也是一種對誤差處理的常用方法，但它是有一些先決條件的：首先，它要求各單項誤差必須互不相關，或叫彼此獨立。並且各單項誤差的極限值具有相同的信賴水平。對此，前者較容易實現，後者在實際中難以滿足。因此，在建立量測不確定評估時，採用此計算方法是不夠嚴謹的。按照“測量不確定度表達指南”的要求，應先找到影響測量结果的各單項誤差的極限值，再根據其誤差的性質確定其屬於何種分布，此時就可以確定其修正因子的大小了。再將各單項誤差極限值除以相應的修正因子後，轉換成相應的標準偏，並以標準偏表示該項的標準不確定度，如果此時各單項誤差是彼此相互不關聯的，再用均方根法計算出合成標準不確定度，最後再將合成標準不確定度乘以一個修正因子，就得到了測量结果的擴充不確定度。以上述可見，按照國際指南推薦的方法，要比用以往方法計算出的不確定度更加合理一些。同時分析量測系統之所有誤差來源，其重點將針對主量測儀器及其必需的配套設備來加以考慮，有些影響量在分析過程中的不確定度時應予以考慮。另外在採用國際指南分析量測的不確定度時，還有一個問題值得注意。按國際指南推薦的計算方法，將不確定度的計算分為 A 類、B 類兩類估計方法，對於 B 類估計方法，基本上與上述方法類似。而對於 A 類標準不確定度，過去在建立量測不確定分析報告中大多數未加以考慮。若考慮此項不確定度，只要將原技術報告中重覆性標準偏差值直接引進來即可。就精密量測的關點而言，這是不妥的情形。為了正確估計 A 類標準不確定度，對於送到上一級計量檢定機構檢定的校正用儀器，應請上級檢定機構對此提供數據，而可以自行進行量值傳遞的，當然也要對標準裝置本身進行重覆測量才可。

本專題針對上述之問題進行分析探討，並對於一般鋼材之抗拉強度進行實際的量測與分析，建立一套較為精確合理的材料拉伸試驗量測系統，可提供本分局在執行抗拉強度量測準確可靠的技術參考。

關鍵字：抗拉強度量測，測量不確定度，A 類估計方法，B 類估計方法

1. 前言

量測在科學技術、國際貿易、工程項目及日常生活的各種領域中是不可缺少的一項工作，量測的目的是為確定被量測的量值。量測的質量往往會直接影響到國家和企業的經濟利益，例如，出口貨物若由於磅秤的不準確，多了就白送給外商，反之，少了就要賠款，兩者皆會造成很大的損失。量測的質量還往往成為科學實驗成敗的重要因素，例如：如果對於衛星的重量量測偏低，就有可能導致衛星發射因推力不足而失敗。量測的質量亦會對於人身的健康和安全造成重要的影響性，例如：使用γ射線或雷射光治療疾病時，若對於劑量的量測不準確，劑量太小達不到治病的目的，進而延誤治療，反之，劑量過大會造成對人體的傷害。因此，當報告量測結果時，必須對量測結果的質量給出定量說明，以確定量測結果的可信程度。量測不確定度就是對量測結果的質量的定量評定，量測結果是否有用，在很大程度上取決於其不確定度的大小，所以量測結果必須有不確定度說明，才是完整的和有意義的。

對於量測結果的表示可區分為誤差與量測不確定度，其分別為古典誤差理論與現代誤差理論的核心。然而，在古典誤差理論中，以真值作為反映量測結果的偏離程度依據，由於真值在實際的應用中難以求得，使得古典的誤差理論在實際的應用中難以有效使用。現代誤差理論係以量測不確定度方式來表達，由於其可定量表示量測結果是目前計量學領域中一個較新的概念，它的應用具有廣泛性與普遍性。正如國際單位制計量已拓展到各種科學技術的量測領域並被全世界採用。在全球經濟和市場激烈競爭的今天，量測不確定度表示方法的統一是國際貿易和技術交流所不可缺少的，它可使得各國進行的量測與所得到的結果可以相互比對，進而取得相互的承認或共識。因此，統一量測不確定度的表示方法和推廣應用國際公認的規則受到了國際組織的高度重視。

以往分析量測之總不確定度(又稱擴充不確定度)，多是先找出各項誤差值，然後利用均方根法計算出一個數值，一般情況下就認為此數值即為量測的擴充不確定度。有時候會將此數值乘以一個修正因子後作為該量測的總不確定度。採用均方根法應該說也是一種對誤差處理的常用方法，但它是有一些先決條件的：首先，它要求各單項誤差必須互不相關，或叫彼此獨立。並且各單項誤差的極限值具有相同的信賴水平。對此，前者較容易實現，後者在實際中難以滿足。因此，在建立量測不確定評估時，採用此計算方法是不夠嚴謹的。按照“測量不確定度表達指南”的要求，應先找到影響測量结果的各單項誤差的極限值，再根據其誤差的性質確定其屬於何種分布，此時就可以確定其修正因子的大小了。再將各單項誤差極限值除以相應的修正因子後，轉換成相應的標準偏，並以標準偏表示該項的標準不確定度，如果此時各單項誤差是彼此相互不關聯的，再用均方根法計算出組合標準不確定度，最後再將組合標準不確定度乘以一個修正因子，就得到了測量结果的擴充不確定度。以上述可見，按照國際指南推薦的方法，要比用以往方法計算出的不確定度更加合理一些。同時分析量測系統之所有誤差來源，其

重點將針對主量測儀器及其必需的配套設備來加以考慮，有些影響量在分析過程中的不確定度時應予以考慮。另外在採用國際指南分析量測的不確定度時，還有一個問題值得注意。按國際指南推薦的計算方法，將不確定度的計算分為 A 類、B 類兩類估計方法，對於 B 類估計方法，基本上與上述方法類似。而對於 A 類標準不確定度，過去在建立量測不確定分析報告中大多數未加以考慮。若考慮此項不確定度，只要將原技術報告中重覆性標準偏差值直接引進來即可。就精密量測的關點而言，這是不妥的情形。為了正確估計 A 類標準不確定度，對於送到上一級計量檢定機構檢定的校正用儀器，應請上級檢定機構對此提供數據，而可以自行進行量值傳遞的，當然也要對標準裝置本身進行重覆測量才完整。

在國際經濟和市場平等競爭情形下，各方面之量測表達方式必須與國際接軌，才得以提供可被接受的量測數據。目前國際標準化組織（ISO）為了推廣與落實量測不確定度概念與作法，陸續對於相關標準進行修正，如 ISO/IEC 17025（1999）及 ISO 9001（2000）等等，這些標準對於量測結果的不確定均有明確的要求。由上述可知，量測不確定度的評估在計量學領域中是一個非常重要的的概念。如能確實落實並運作，最後方能確保產品品質之穩定性。

2. 誤差理論的發展歷程

誤差理論的起源最早可以追溯到十八世紀，二百餘年的發展歷程可以區分為古典誤差理論的萌芽期、成熟期和現代誤差理論的形成發展期。

古典誤差理論的萌芽期：1794 年，德國數學家高斯(C.F.Gauss)首次提出最小平方法原理，並於 1809 年在其著作「天體沿圓錐截面圍繞著太陽運動的理論」中發表。同一時期，法國數學家勒居德爾（A. M. Legendre）也於 1805 年在其著作「決定慧星軌道的新方法」中應用最小平方法處理觀察結果，這就為量測數據處理奠定了理論基礎。

古典誤差理論的成熟期：二十世紀前後，蘇聯科學家契比雪夫、克雷洛夫及瑪利柯夫等對誤差理論進行了系統研究，取得許多研究成果，其中最著名的是瑪利柯夫在 1949 年出版的「計量學基礎」，全面系統地介紹了誤差理論，成為古典誤差理論的科學總結。

古典誤差理論以統計學理論為基礎，以靜態量測誤差為研究對象，以服從常態分佈為主的隨機誤差估計和數據處理理論來表徵。隨著現代科技的發展，對量測結果的可靠性提出更高要求。傳統上用量測誤差來表徵量測結果可靠程度的方法由於真值的相對性與理論性，導致量測誤差無法確定，使得古典誤差理論難以適應現代量測的要求。

現代誤差理論的形成與發展期：1973 年，J.E.Burns 在「誤差與不確定度」一文中正式提出”不確定度”一詞。1993 年，國際標準化組織（ISO）等七個單位聯合頒佈了「量測不確定度表示方式指引（Guide of the Expression of Uncertainty in Measurement, GUM)」，建立了在量測中評定和表達不確定度的一般規則。同一時期，誤差分離與修正技術、動態量測誤差的評定等均有較大發

展，形成了較完整的現代誤差理論體系。

3. 量測不確定的緣起與發展

量測不確定度之想法與建議始於 1963 年美國國家標準局(NBS)的 Eisenhart 在研究「儀器校正系統的精密度和準確度的評估」時提出了定量表示不確定度的建議。70 年代，NBS 在研究和推廣量測保證方法（MAP）時在不確定度的定量表示方面有了進一步的發展。不確定度這個術語逐漸在量測領域內被廣泛應用，但表示方法各不相同。1977 年 5 月國際游離輻射諮詢委員會（CCEMRI）的 X-γ射線和電子組討論了關於校正證據如何表達不確定度的幾種不同建議，但未作出決議。1977 年 7 月的 CCEMRI 會上提出了這個問題的迫切性，由 CCEMRI 主席，即當時美國 NBS 局長 Ambler 將此量測不確定度表示的國際統一問題提案送交國際度量衡委員會（CIPM）討論。1978 年，國際度量衡局（BIPM）依 CIPM 要求制訂了一份詳細的問卷，並分發至 32 個國家計量研究院及 5 個國際組織徵求意見。1980 年，BIPM 依各國彙總出來之意見，成立了不確定度表示工作小組，並起草了一份建議書，名為 INC-1（1980）。該建議書向各國推薦了不確定度的表達原則，使得量測不確定度的表示方法取得國際的統一性。1981 年第 70 屆 CIPM 大會批准了上述的建議，並發佈了一份 CIPM 建議書：CI-1981。1986 年，CIPM 再次重申採用上述量測不確定度表示的統一方法，並發佈了一份 CIPM 建議書：CI-1986。CIPM 建議書推薦的方法是以 INC-1（1980）為基礎，要求所有參加 CIPM 及其諮詢委員會贊助下的國際比對及其他工作參與者，在發給報告時必須使用「組合不確定度」。自 80 年代以來，CIPM 建議的不確定度表示方法已經在世界各國許多實驗及計量機構中使用。但正如國際單位制計量單位不僅在計量部門使用一樣，量測不確定度應該可以應用於一切使用量測結果的領域。為了進一步促進 CIPM 方法在國際上的廣泛應用，1986 年，CIPM 要求國際標準化組織（ISO）以 INC-1（1980）建議書為基礎，起草一份能廣泛應用的指引文件。這項工作隨後得到了 7 個國際組織的支持與贊助，這些組織包括：國際度量衡局（BIPM）、國際電工委員會（IEC）、國際臨床化學聯合會（IFCC）、國際理論物理與應用物理聯合會（IUPAP）、國際法定計量組織（OIML）。自此，便由 ISO 第四技術顧問小組（TAG4）的第三工作小組（WG3）執行起草工作，該工作組的成員是由 BIPM、IEC、ISO 和 OIML 等組織推薦。1993 年，第一版量測不確定度表示方式指引(Guide of the Expression of Uncertainty in Measurement, GUM）以 7 個國際組織的名義正式由 ISO 發行；1995 年修訂再版，目前這份指引已經獲得廣泛地為各國所遵行及採用。2001 年，由上述 7 個國際組織及國際實驗室認證大會（ILAC）的代表，在 BIPM 召開計量學指引聯合委員會（JCGM）會議，其中第一工作小組（WG1）接管了 ISO 原來的 TAG4 的任務，一方面對 GUM 進行了曾修和充實；另一方面計畫出版一份簡易版本，以便於基層推廣應用量測不確定度。第二工作小組（WG2）負責修訂 VIM，以便於在基本術語上獲得各類學門、領域之更為廣泛的認同

當前國際上在表示量測結果及其不確定度時的約定作法，使得全世界不同國家、不同地區、不同學科、工程、商業、工業及法規等領域在表述量測結果和量測不確定度時具有一致的含意，以便於理解、翻譯和比對。因此，量測不確定度表示方式指引的應用必將對推動人類的科技進步和促進國際交流具有重要的意義。

4. 誤差與量測不確定度的比較

誤差與量測不確定度分別為古典誤差理論和現代誤差理論的核心，二者既有區別又有關係。

誤差是指量測結果減去被量測的真值，其大小反映量測結果偏離真值的程度。該定義雖然嚴格準確，但由於真值是未知的理想概念，使得誤差在實際應用中難以確切求得。

量測不確定度是表徵合理賦予被量測值的分散性，與量測結果相關連的參數。其大小決定了量測結果的使用價值，不確定度越小，量測結果質量越高，使用價值也越大。

比較兩者的定義截然不同。前者是指量測結果相對真值的差異大小，後者指對量測結果的不肯定程度，前者主觀不可知的，而後者則是主觀可知的，兩者的區別如表一所示，但兩者間也有一定關聯。它們都是量測結果相關聯的參數，均由量測結果導出，從不同角度對量測結果進行評價，都具有定量描述的數值，輸入量與被量測量相同，來源都市對量測值認識不足和量測手段的不完善。

表一　誤差與量測不確定度的區別

	誤差	量測不確定度
含義	反映量測結果偏離真值的程度	反映量測結果的分散性程度
符號	非正即負	恆為正值
分類	系統誤差、隨機誤差和粗大誤差	A 類評估和 B 類評估
表示符號	符號較多，且無規定	規定用u、u_c、U、U_p表示
自由度	一般不需要考量	需要考慮
組合方式	代數和或均方根	均方根
主客觀性	客觀存在，不以人的認識程度改變	與人們對被量測與量測過程的認識有關
修正性	可用系統誤差的估計值修正量測結果	不能用不確定度對量測結果進行修正
操作性	真值未知，誤差無發確切求得	可用統計方法或先驗信息評定不確定度
信賴水準	不需要且不存在	需要且存在
與分佈的關係	無關	有關
與真值的關係	有關	無關
與量測條件的關係	無關	有關

5. 研究動機

在機械製造工業中，為了正確合理地選用材料，如金屬、非金屬等材料，都必須先知道材料的機械性質。對於材料的各項機械性能確知，則必須藉助力學性能的試驗加以量測。然而，量測數據是否準確可靠，與所使用計量儀器是否準確及量測不確定評估是否合理有著密切的關係。材料拉伸試驗是材料機械性能最常使用的測試方法，因此，本研究將以鋼材之拉伸試驗為例子，探討材料抗拉強度測試之量測不確定度評估方式。同時，對於再生性、重複性及精密量測亦加以深入的分析，並基於再生性評估與管制圖提出量測不確定度評估參考準則。

最後，我們將拓展本研究專題的適用範圍，建立一個可適用於全部測試領域之量測不確定度評估方式，以提供本分局各CNLA實驗室測試領域量測不確定度評估參考依據，已提升實驗室的國際交流性。

6.　重複性、再生性及管制圖

儘管ISO Guide在量測不確定的評估上，一般已被認為是完整且嚴格的評估方法依據。實際上，很多人發現這個評估方法太過於錯綜複雜，在該量測不確定度表示指引中，其量測的數學模型並沒有作很好的界定。因此，在一個缺乏數學模型的量測系統中，為了評估每一個變異不確定度的敏感係數，就必須藉由實驗來

確定之(參考第3.4章節)，這是一件極費力的工作。

在這個章節裡我們的重點在於精密性、重複性和再現性的量測及精確的量測。這個方法對於大部分已經熟悉重複性和再現性的實驗的測試實驗室及包含所有主要不確定度的貢獻之合適的再現性實驗效益大都能適用。因此,完整的不確定評估可以不必依據ISO Guide所提的數學運算而得到。對於完整的細節,可以參閱ISO 5725中的第2部分「量測方法的精確性(準確性和精密性)及結果-標準量測方法中重複性與再現性評估的基本方法」。此外，ISO將一份草稿技術標準訂定為ISO/DTS 21748。這份文件對於量測不確定度評估之重複性與再現性及精確性評估提供了一個極為完善的指引。另外,這個部分亦討論使用管制圖表作為不確定度評估的基礎。對於管制圖表的細節可參閱ISO 8258。

6.1 管制圖

採用管制圖表作為不確定度評估管理的方式，其管理的理念可表示如下：

(1) 量測不確定度被定義為與量測結果相關連的參數，表徵合理賦予的被量測值的分散性。

(2)這個參數是一個標準偏差或者一個標準偏差的倍數，可以由試驗數據的統計分析而得到；

(3)工作範圍的上下限建立在管制圖表中，以確保在1000次的量測中大約有997次會落在量測統計控管的工作範圍內；

(4)警戒範圍的上下限建立在控制圖表中,表示在1000次的量測中大約有950次會落在量測統計控管的警戒範圍內；

由上可知，我們可以觀察出在工作界限處理中，其提供量測不確定度評估的信任水準為99.7%(3σ)，落在警戒區的信任水準為95%(2σ)。

基於管制圖表數據的量測不確定評估管理，其有一些相關注意事項：

(1)管制試驗樣品應該有證明或其他已知或可接受的數據。採用這種方法進行量測結果的計算，必須能對量測過程中的偏差加以識別與修正，必要時可以消除該項偏差量。

(2)藉由管制件來表徵量測結果，在一般常規的測試條件下應該是吻合實際的量測值，通常量測不確定度可視為測試水平或量測值的函數。例如，對於融化流動速率之不確定度評估中，其量測結果會相依於融化流動速率的值，非常低的流動速率之不確定度評估通常會不同於與非常高的流動速率之不確定度評估。因此，有必要去追溯一些管制件在不同的量測基準，以使得測試的實驗室正確地評估出各式各樣的量測基準。

(3)對於管制件的量測過程應該與工作件相同，包括二次抽樣和樣品的準備。如果不是，則附加的不確定組成分量可能必須被考量(可參閱本研究第7章節一般方法規則)。

(4)量測過程必須在管制圖表的統計管制中，這意味著在鑑定前必須有足夠取樣點數量的收集，無論取樣的量測結果是否在管制內，為了確保量測結果總標

準差評估的合理準確性，此程序為量測管制必要作業。這個程序並沒有普遍適用的規章，但大約以4或者5的20-25個小組量測結果納入概算，以明確且合理的訂定出管制限。

在量測不確定度評估管理中，管制圖表提供了最簡單且最直接的不確定度評估模式。假如驗證出參考件是無效的，將可採用管制圖表作為不確定度評估管理依據。

6.2 重複性與再生性

在量測結果的表示中，相關量測名詞定義依據ISO3534-1表示如下：

精密度：在規定的條件下，獲得獨立的量測結果之間的接近程度。精密度相依於隨機誤差的分佈與真值無關（或約定的量測值）。精密度的量測通常由測試結果的標準差計算而來，低的精密度意味著高的標準差。獨立的量測意味著所得結果不被任一先前在相同或相近量測項目所影響。精密度的定量量測與規定條件是密切相關聯，重複性與再現性條件則為最大管制條件下的特例。

重複性：是在重複性條件下的精密度，即在一相同實驗室中同一操作者使用相同的儀器設備在一短暫時間內，測試相同項目的結果與條件無關。重複性標準差是在重複性條件下所獲得測試結果的標準差。

再現性：是在再現性條件下的精密度,即在不同的實驗室中不同的操作者使用不同的設備儀器下，測試相同項目的結果與條件無關。再現性標準差是再現性條件下獲得結果的標準差，或是在再現性條件下，測試結果的分散性量測。一個再現性有效性陳述需要去識別條件的改變。 例如，ISO 5725考量到4個受制因子：操作者、設備、校正和時間。 一個再現性的陳述需表明這些因子在實驗的過程中變化情形。

偏差：是指測驗結果與被接受的參考值之間的差別。偏差是受制於隨機誤差的系統誤差總和，可能有一個或更多系統誤差組合而成，若所得到的結果與被接受的參考值有大的差異，則反映出一個大的偏差量。

精確度：是指來自於測試結果最大設定與約定參考值之平均值間接近程度。精確度的量測通常以偏差量來表示。這通常導因於實驗室在執行一個標準、有效的測驗方法，在確認方法程序中，可藉由內部實驗室間比對來評估其偏差量與精密度。例如，就一個ASTM測驗方法的例子，精密度的陳述將包括實驗室內的標準差(S_r)和實驗室之間的標準差(S_R)。

一間實驗室能否建立合理的不確定度評估，可由下列事項來判定：

(1) 能否建立使用量測方法時之偏差量不超過測驗方法所訂之偏差量？

(2) 能否建立使用測驗方法中所獲得的精密度不超過實驗室間的標準差(如一些因子改變下的再現性)？

(3) 能否識別在任一實驗室間比對中沒有被合理研究的影響因子，及其影響程度，相對之不確定度及靈敏係數。

如果上述條件都滿足的話，則實驗室可利用平方根方法將對應之偏差修正量及每一影響因子的不確定度組合起來，進行實驗室的精密度評估。

6.2.1 管制偏差

實驗室可以利用下列方法來驗證它的量測偏差量是否在管制限制內：

(1)使用公認的參考材料

使用適當參考標準件或材料，實驗室將由它的偏差量評估提出量測之重複性，這是不同於它的測試結果平均值及標準件或材料的公認值。如果這個偏差的絕對值小於在測試方法中的精確度陳述給定之再生性標準偏差兩倍，則實驗室可能需要將這個偏差納入管制。

(2)內部實驗室的比對

實驗室藉由參加精密測試計畫，將可有效由較大量的實驗室測試數據中，評估出量測結果的偏差。實驗室比對意味著總平均值或另一個在這樣的計畫中的分佈價值，例如，將可用以證明他們量測偏差是否在合適的管制內。

6.2.2 精密度管制

為了確保精密度管制，實驗室可以在重複性下執行大量的重複量測，比對量測結果的重複性標準差S_l與測試方法中精密度陳述給定之重複性標準差S_r。例如，在力量測試實驗中比較S_l和S_r，對於測試之明顯的差異，將允許實驗室對於精密性的驗證管制，假如S_l明顯的不同於S_r，則實驗室將使用S_l來評估它的量測不確定度，否則使用S_r。

再則實驗室已驗證精密度及偏差的管制，可以自由選用在測試方法中所給定這些量的評估作為量測不確定度評估的偏差量。然而，必須在一個持續合適管制精密性與偏差的基準下進行驗證，這才是完整的。例如，透過包括管制圖表的適當測量保證技術。再者，參考材料或標準件使用在實驗室常規的測試中必須對於測試遭遇基準下驗證。在這些條件執行且滿足一個繼續的基礎下，實驗室才能涵蓋所有的資訊，以確保量測不確定度評估的合理性。

7. 量測不確定度表示方法

7.1 量測分類

任何一個不確定度的分析首先必須要有一個明確的分類。儘管這個步驟似乎是瑣碎不重要的，事實上它是非常重要的且非常困難的。沒有清楚瞭解量測目的及量測結果的影響因子，則一個有意義的不確定評估將不可能達成。

關於這一點可由ANSI/NCSL Z540-2-1997（美國量測不確定度表示指南）亦有明確的規範。

在一個複雜的測試中，被量測量與影響量測結果的因子並不有清楚的界定，甚至於在工業標準測試方法中，設定各種零件之公差及測試機械的特性，對於環境條件、樣品準備的特定方法、材料本身在測試過程中自然存在的主要變異來源都必須加以管制。假如實驗室不了解這一點，則測試過程就猶如一個黑盒子，實

驗室將無法分析量測不確定度。

在另一方面，量測定義需求的基準必須受被量測正確性基準所支配。被量測量的分類可能需要描述有關時間、溫度及壓力的量。例如：採用 ASTM D638 中特定方法進行纖維強化複合材料拉伸破壞強度量測時，除了需對於被量測量的界定外，尚需註明對於拉伸強度結果有影響的不確定與因子，包含：

（1） 載明拉力機的準確性與其他特性。

（2） 載明測試的環境條件。

（3） 載明測試樣品的模式條件與尺度條件。

（4） 載明製作樣品的環境條件。

（5） 載明使用於量測製作測試項目的寬度與厚度的正確性。

在界定被量測量時，觀察其明確性、暗示性因子是非常重要的工作，通常可藉由了解原理、假設與科學基礎來界定必需的影響因子。

7.2 量測模式

量測結果的不確定度是由於我們對於被量測量與影響因子兩者之認識的不完整所造成的。即使在修正已知的系統效應後，修正後的量測結果也只是一個被量測量的評估值，這是由於隨機效應及我們對於修正量大小本身只是一個評估量。我們注意到對於一個經過修正後的量測結果可能已經非常的接近被量測量的值，即使量測本身可能就是一個大的不確定度。在另一方面，量測的不確定度必須不被未知誤差所混淆，影響量測的不確定度許多可能的來源包含：

(1) 對於被量測量的不完全界定。

(2) 對於被量測量的不完整瞭解。

(3) 採用不具代表性的樣品。

(4) 在量測時環境條件的影響或環境條件量測的不完整。

(5) 讀取類比儀器數據的個人偏差，包含視差效應。

(6) 有限的解析度或識別能力。

(7) 量測標準與參考材料非解析值。

(8) 由外部來源和使用資料轉換演算影響因子的非解析值。

(9) 在量測方法與程序中結合近似方法與假設條件。

(10) 在相同的條件下對於被量測量的觀察變化。

不確定度的來源不一定是獨立的，且一些或 1-9 項中可能貢獻於重複觀察下的變化。假如所有量測結果的影響量間是可以變化的，則其不確定度可藉由實驗數據的統計處理來評估。但這似乎在實際的情形是不可行的，因為在這樣一個詳細的實驗評估其不確定度需耗費相當大的費用與時間。在 GUM 中假設所有量測結果的不確定度基於量測的數學模式可以被評估。再者，這個模式可符合相對量測需求的精確性的需求。然而，由於數學模式總是不完整的，所有適當的輸入量可以被改變，以致於不確定度評估盡可能是基於實驗的數據。利用實驗標準與管制圖可以建立統計管制的量測系統，且這些數據可被使用作為獲得合理的量測不確定度

評估。當實驗數據顯示數學模式是不完整的，則這個模式就應該進行修正。

在一般情形，數學模式應該是幾個輸入量的函數，由輸入量來獲得量測結果。假如輸入量為x_1、x_2、、、x_n，則我們可以寫出量測結果y與輸入量x_i的關係函數，如下式所示。

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{1}$$

這個函數可以了解輸入量所具有的不確定度，亦即整個量測過程中量測結果之不確定度，這也是整個量測過程的誤差源。

例如：在 ASTM D638 中，材料拉伸破壞強度被定義為力量（F）需要除以試件的截面積（A），該截面積又被定義為厚度 T 與寬度 W 的乘積。因此，我們可以利用下式來近似材料拉伸強度量測的數學模式：

$$S = f(F, T, W) = \frac{F}{TW} \tag{2}$$

由於可以直接地看出函數中，多數可能的影響量並不是明確的，因此我們稱它為最初近似。例如，在尺寸上的溫度效應、試件的強度、拉力機的慣性效應或力量作用下不同樣品的頸縮或伸長行為等等影響因素並未被考量。由於這個近似式將會影響最後的不確定度評估，如果覺得這個最初近似式是不合適的話，可以進行修正，使其涵蓋其它的影響量。

7.3 不確定度分佈與定量化

7.3.1 A 類的標準不確定度評估

A 類不確定度評估係由實驗數據的統計分析推導得到，在統計分析方法中，該型態的不確定度評估有一定的複雜性，所以我們僅考量測試結果的標準差作為 A 類不確定度評估。詳細的陳述可參考 GUM 和 ISO 5725。

通常評估一個量測值係由這些測試結果的平均值來決定。例如，對一個被測量值X，在同一條件下進行n次獨立重複量測，量測值為X_i（i=1,2,、、、,n），

可由下式得到樣本之算術平均數$\overline{x}$，

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{3}$$

$\overline{x}$為被測量值 X 的估計值即測量結果。以$\overline{x}$來表示實驗標準偏差 S（$\overline{x}$），關係式如下所示：

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{n-1}} \tag{4}$$

這些數據可以利用計算機或程式加以計算得到，例如：在 Excell 中可以由 AVERAGE 和 STDEV 功能很快且容易得到測試結果的平均值與標準差。

在本專題研究中，材料抗拉強度試驗量測結果，如表二所示中。

表二　材料之抗拉強度試驗量測結果之 A 類評估

試片編號	厚度	寬度	破壞力量	拉伸強度
1	12.4mm	49.9mm	83000N	134.14N/mm^2
2	12.6mm	50.1mm	90000N	142.57 N/mm^2
3	12.5mm	50.0mm	81000N	129.60 N/mm^2
4	12.6mm	50.0mm	87000N	138.10 N/mm^2
5	12.4mm	49.9mm	85000N	137.37 N/mm^2
平均值	12.5mm	49.98mm	85200.0N	136.36 N/mm^2
標準差	0.1mm	0.0837mm	3493N	4.828 N/mm^2

由上表數據可知，我們可以得到試片破壞力量的最佳評估值為 5 個力量值的平均（85200.0N），這些 5 個量測結果的標準差為 3493N。量測結果之不確定度的產生，係由於拉力機的隨機變異、製模過程、樣品矯正過程及試片本身變異的關係。另外，試片之厚度量測值的標準差為 0.1mm，及試片之寬度量測值的標準差為 0.0837mm，亦是造成量測結果的 A 類不確定度變異原因。

7.3.2 機率分佈

當量測之輸入量不確定度無法由實際重複量測數據加以分析求得(即無法以 A 類評估方法求得時)，則必須藉由直接給定或推估分配計算方法求得。這裡的推估分配計算方法即藉由推估量測過程中的變異因子，套用相關之機率分佈函數加以描述求得其量測不確定度，該類評估方法所求得的結果稱為 B 類標準不確定度。因此，本章節將對於量測不確定度評估方法採用之機率分佈進行介紹。

機率分佈係量測結果的值與該值出現的機率之間的對應關係，稱為量測結果的機率分佈。在統計的理論中，機率分佈種類存在無限多種，但僅有少部分之機率分佈被運用於量測結果的評估，在這一章節中我們將推導這些機率分佈函數，並藉由這些簡單推導過程，可以讓我們了解這些機率分佈函數中變數如何獲得，如此才可以更正確使用這些機率分佈函數來描述量測結果。

1.　矩行分佈

首先，我們從矩形分佈進行介紹，該分佈又稱均勻分佈。這個機率分佈被使用於描述輸入量得到的值皆落在兩個界線之間，且在該範圍內任何一點的輸入量出現的機率皆相等的量測模式。

圖一為矩形或均勻機率分佈圖，該分佈形式中分佈出現機率為連續的，該機率分佈係由一水平線延伸形成的兩個界限分佈形態。

假如界限為±a，則我們可知輸入量落在界限＋a 與−a 之間的機率皆等於 1，在界限以外出線的機率則為 0。機率分佈函數的基本需求中，經常會對於分佈函數正交化，由於正交化的機率分佈函數積分必須等於 1。

對於矩形分佈函數 f(x)=c 而言，其界限為±a，該分佈函數之正交化可表示為下式

$$\int_{-a}^{+a} f(x)dx = \int_{-a}^{+a} c\,dx = cx\Big|_{-a}^{+a} = c(a-(-a)) = 2ca = 1. \tag{5}$$

為滿足正交化條件，我們可以選擇 c=1/2a，因此，最後得到之矩形機率分佈函數為 f(x)=1/2a，其界限包含±a，以 y 軸為中心（或是分佈中心為 x=0）。

變異以σ^2表示，其含意為機率分佈函數量測結果的分散程度，或稱分佈寬度，其可由正交化機率分佈函數的積分獲得，如下式所示

$$\sigma^2 = \int x^2 f(x)dx \tag{6}$$

對於矩形機率分佈函數，我們可由下式獲得其變異

$$\sigma^2 = \int_{-a}^{+a} \frac{x^2}{2a}dx = \frac{1}{2a}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{+a} = \left(\frac{1}{6a}\right)\left(a^3-(-a)^3\right) = \frac{2a^3}{6a} = \frac{a^2}{3} \tag{7}$$

標準差σ為正的變異的平方根，矩形分佈的標準差為

$$\sigma = \frac{a}{\sqrt{3}} \tag{8}$$

矩形分佈使用的注意事項如下：

(1) 均勻機率：矩形分佈的定義係假設不確定度貢獻有一個均勻的機率發生在兩個界限間。另一方面，在界限之間的每一個值都有相同的機率。自然界中除了離散的事件外，通常不會呈現這個形式的行為，所以這個型式的機率分佈實際上要在一個嚴苛的需求下才能實現。

(2) 100%封閉：在均勻機率分佈中，落在界限外的機率皆為零，也就是說所有可能的值對應之不確定度貢獻皆會落在界限之間。

(3) 最小界限：假如界限±a 包含全部的分佈，則在界限±na 中，n 為任一大於或等於 1 的值。因此，這個界限為不確定度評估中界線的最小值，否則得到不確定度估計便非常大。

另可以藉由下列三個準則來識別是否適用矩形分佈型態

（1） 數位解析度

由於數位指示的裝置之有限解析度的不確定度是一個共通的不確定因素。假如裝置的解析度為 R 則我們知道指示值 x 可能落於 x(0.5R 之間。對於矩形分佈便是一個很好的有限解析度不確定度模式，對於有限解析度的指示裝置之標準差可表示如下

$$u_R = \frac{0.5R}{\sqrt{3}} \tag{9}$$

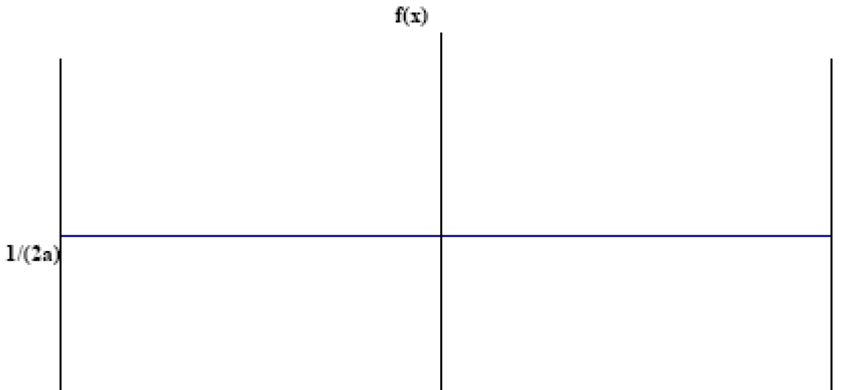
（2） RF 相角：

RF 功率指示器在一個負載中係藉由一個介於$-\pi$ 到$+\pi$ 的相角(來傳遞，且發生在這些界限內的機率是均勻的。因此相角的標準不確定可表示為

$$u_\theta = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \cong 1.81 \tag{10}$$

（3） 未知的表示

矩形分佈經常使用於未知實際分佈的例子中，這個機率分佈經常在 B 類不確定度評估的例子中出現，其值與對應不確定度因素的不確定度可由參考書中得到。例如，假如我們需要材料的線性熱膨脹係數，我們可由參考書中找到一個值為”150ppm/mm℃(20ppm/mm℃”，這在書中只是一個訊息，並無給定如何去推導得到其不確定度。像這樣的例子，只是一個典型將其不確定度視為矩形分佈。



圖一　矩形或均勻機率分佈圖

2.　三角形分佈

若已知輸入量有集中分佈於機率分佈中心趨勢，其集中程度介於常態分佈與矩形分佈之間，通常會將此分佈型態設定為三角形分佈。例如，想像兩個塊規在平面上吸附在一起，在達到熱平衡之後，對於兩者溫度差異幾乎為零，可能的溫度分佈在兩端界限出現機率為零（實驗決定)。對於這種行為的機率分佈通常採用三角形分佈來表示，如圖二所示，其正交化之機率分佈函數可表示如下

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x+a)}{a^2} & for \quad -a\le x\le 0\\ \dfrac{(a-x)}{a^2} & for \quad 0\le x\le a.\end{cases}$$ (11)

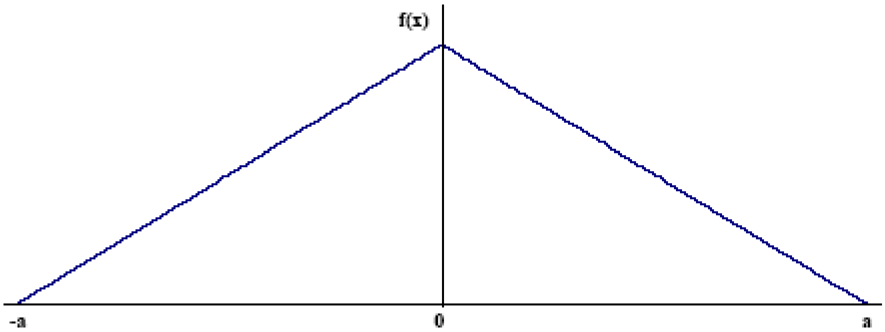
這種分佈的變異為

$$\sigma^2=\frac{a^2}{6}$$ (12)

因此，三角行分佈的不確定度標準差為

$$u=\frac{a}{\sqrt{6}}$$ (13)

a 為機率分佈區間的半寬度。



圖二　三角形機率分佈圖

就上述塊規例子而言，我們已知由實驗得到的溫度差為 0.1F，則我們可以評估兩塊規間的溫度差不確定度為

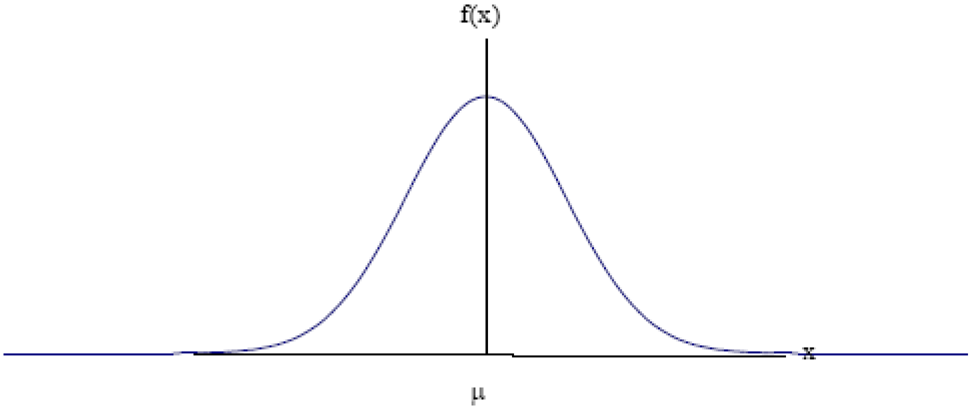
$$u_T=\frac{0.1^{\circ}F}{\sqrt{6}}=0.0408^{\circ}F.$$ (14)

3.　常態分佈

這個分佈藉由兩個參數來表示：平均值μ由分佈的中心位置來決定，標準差σ由分佈的寬度來決定，常態分佈的機率密度表示為

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]}$$ (15)

一般自然現象的統計行為皆適用該機率分佈，其分佈圖如圖三所示



圖三　　常態機率分佈圖

4.　U 形分佈

這個分佈模式適用於輸入量的值大都在界限附近的情形，該機率分佈圖如圖四所示。例如，從事恆溫工作，室溫趨近於我們設定點的最大容許差異值，如室溫相對於設定點大都集中在太熱或太冷。這個機率密度函數表示如下

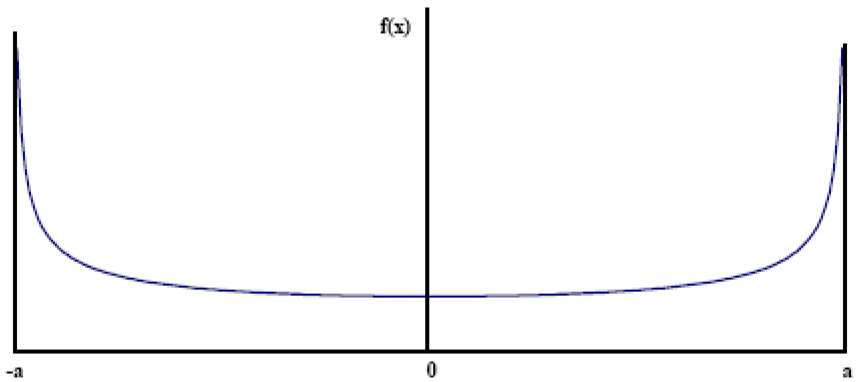
$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} \quad for \quad -a \prec x \prec a \tag{16}$$

這裡的界限為±a，其標準差為

$$\sigma = \frac{a}{\sqrt{2}} \tag{17}$$

例如，假定室溫控制容許變異界限為±5℃，則室溫的變異標準不確定度為

$$u_T = \frac{5^\circ C}{\sqrt{2}} = 3.54^\circ C. \tag{18}$$



圖四　　U 形機率分佈圖

5.　柏以松分佈

柏以松分佈模式通常被使用於給定時間與空間單位的隨機發生事件情形。例如，

對於一天內機器生產壞的零件產品的數量，其構造中螺帽缺失的數量，或藉由放射性樣品檢測出數量的分佈情形皆可套用該形式之機率分佈。以下有四個必要的條件，採用柏以松分佈是一個好的近似：

（1） 感興趣的變數必須是事件的數量（因此，感興趣的變數必須是正積分或零）。

（2） 隨機的事件必須是分離的且彼此相互獨立的。

（3） 隨機事件必須在給定的時間或空間發生機率相同。

（4） 隨機事件對於可能事件的最大值應該是較無相關性。

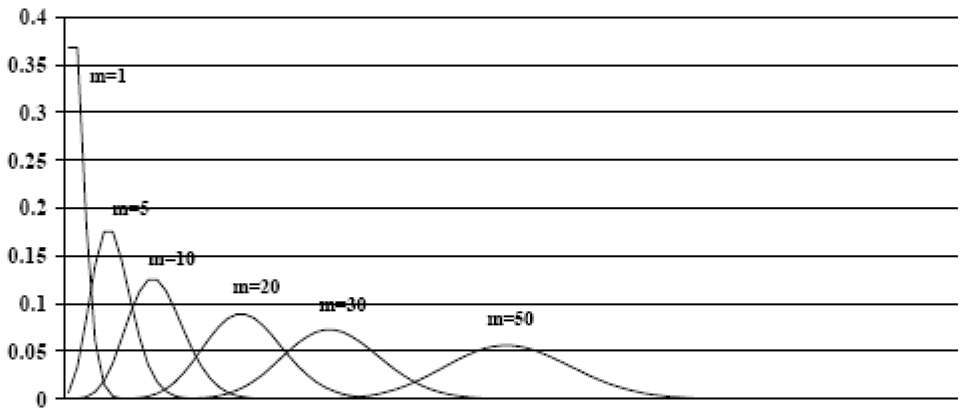
假如每單位時間或空間隨機事件平均為 m，則機率密度 P(x)可表示如下

$$P(x;m)=\frac{m^{x}e^{-m}}{x!} \qquad (19)$$

這裡的 x 表示事件發生數量，e 是自然對數(e≈2071828)。

圖五表示出柏以松分佈隨變數 m 的變化。注意到當 m 增加，分佈的寬度增大且向右邊遷移。此外，當 m 增加，柏以松分佈越趨近於常態分佈。由於柏以松分佈被聯繫著離散事件數量，它實際上並不是平滑的曲線，且是一個修正多角形後的曲線。然而，為了呈現增加 m 的分佈行為我們將點連結起來表示。

在 m=1 時，我們可以看出曲線是非常的狹窄且非常急速的縮小，這表示一個事件在實際特定的時間與空間區間是稀疏的，則其多數發生的機率在相同的區間中是非常的低。因此，當平均發生數量增加，則其機率便偏離特定區間的增量。另外，因為無論 m 的值為何，曲線下的面積必須等於 1，分佈的寬度加寬，所獲得的事件平均數減少（如：曲線的高度減少）。



圖五 m 值變化下的柏以松分佈圖

由於這個分佈較難以了解，所以我們舉出一些例子來說明。

【例子 1】在一個製造程序中，每個小時生產 1000 台洗衣機，這些洗衣機平均 10 台是有缺陷的，請問這個製造程序在一個小時內生產 20 個有缺陷的洗衣機的機率為何?

解答：

在這個例子中隨機發生的平均數為 m=10，且我們想要去找尋在 x=20 時的發生機率。由柏以松分佈的方程式我們可以得到其機率為

$$P = \frac{m^x e^{-m}}{x!} = \frac{10^{20} e^{-10}}{20!} \cong 0.019$$

這是一個相當低的機率，所以假如有 20 台缺陷的洗衣機在一的小時內被生產出來，我們可以認定這個製造程序是非常的不理想。

【例子 2】一個發光驗鈔機檢驗出偽鈔平均數量為每秒一張，在一秒內發現 5 張偽鈔的機率為何?

解答：

這與【例子 1】是相同的問題，其參數為 m=1 且 x=5，所以獲得 5 張偽鈔的機率為

$$P = \frac{m^x e^{-m}}{x!} = \frac{1^5 e^{-1}}{5!} \cong 0.0031$$

柏以松分佈之標準差等於平均發生數量的平方根: $\sigma = \sqrt{m}$

6. **機率分佈的結論**

就一個封閉的界限±a，各個機率分佈的標準差表示如下：

矩形分佈：

$$\frac{a}{\sqrt{3}} \cong 0.5774a$$

三角形分佈：

$$\frac{a}{\sqrt{6}} \cong 0.4082a$$

柏以松分佈：

$\sigma = \sqrt{m}$ ，其中 m 為在給定時間或空間時，隨機發生的平均數量。

7.3.3 B 類的標準不確定度評估

有些不確定度的因素不能用統計方法來計算，或統計的評估是無意義的。對於輸入量之不確定度無法由實際重複量測數據加以統計分析求得，而是以直接給定或推估分配計算方式求得之不確定度，稱這個不確定度為 B 類標準不確定度。

B 類標準不確定度的評估方法，可藉由參考標準件的校正報告或物理量宣告的不確定度，以擴充不確定度的形式來表示，並可轉換為標準不確定度。

B 類標準不確定度來源包括：當標準不確定度無法由重複觀察求值而得，因而量不到真值，其原因可能來自裝置因素、環境因素、人為因素、儀器特性、待測物本身因素及方法因素等等，或者來自以往的量測數據、對於相關材料和儀器特性的經驗、製造商提供的規格、校正報告或其他證書提供的數據、手冊中賦予參考數據的不確定度。B 類評估係依據輸入量對應的標準不確定度換算出來。

7.4 敏感係數

敏感係數本質上是提供一個輸入量與被量測量單位間的轉換因子。例如，被量測量為電阻（單位為歐姆，Ω），溫度為一個輸入量，則我們可以將溫度乘上一個係數（其單位為Ω/℃）直接轉換成電阻。

敏感係數也是作為評估輸入量對於被量測值的改變情形。數學上，敏感係數（C_i）係由模式函數f對輸入量（x_i）的偏微分得到，如下式所示

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (20)$$

這個數學關係式表示輸入量微小改變時，被量測值（f）的變化量。

就拉伸強度的量測而言，其數學模式可表示如下

$$S = \frac{F}{TW} \qquad (21)$$

其中 S 為拉伸強度，F 為試件破壞所需力量，T 與 W 為試件的厚度與寬度，我們可以獲得其敏感係數，如下式所示

$$c_F = \frac{\partial S}{\partial F} = \frac{1}{TW} = \frac{S}{F};\ \ c_T = \frac{\partial S}{\partial T} = \frac{-F}{T^2W} = \frac{-S}{T};\ \ c_W = \frac{\partial S}{\partial W} = \frac{-F}{TW^2} = \frac{-S}{W} \qquad (22)$$

試件的平均厚度為 12.5mm，平均寬度為 49.98mm，試件平均破壞力量為 85200.0N 及平均拉伸強度為 136.36N/mm^2，則我們可以決定出每一個，敏感係數為

$$\begin{aligned} C_F &= \frac{S}{F} = \frac{136.36N/mm^2}{85200N} = +0.0016mm^{-2} \\ C_T &= \frac{-S}{T} = \frac{-136.36N/mm^2}{12.5mm} = +10.91\frac{N}{mm^3} \\ C_W &= \frac{-S}{W} = \frac{-136.36N/mm^2}{49.98mm} = -2.73\frac{N}{mm^3} \end{aligned} \qquad (23)$$

敏感係數也可以由實驗方式來決定。對於未知數學模式時，則我們即無法利用數學方式來決定出敏感係數，所以我們必需藉由合適的實驗方式來獲得。

例如，在拉伸強度量測中，我們可以利用實驗方式來評估，固定材料的寬度與力量，藉由厚度改變觀察其對於拉伸強度結果的影響程度。但實驗也有其限制條件，在這個例子中，固定試件的厚度與寬度，改變力量將會有實驗上將是非常的困難。即使它並非不可能控制，但對於材料本身的組成因子也是拉伸強度不確定的來源。

在理論上，利用實驗方式來決定出敏感係數是簡單且方便的。

就拉伸強度的量測而言，對於一個感興趣的變數 x，我們開始選擇在一特定的值的小範圍內，如我們可以改變拉伸強度試件的厚度範圍為 12.4mm 到 12.6mm。這個範圍的選擇有利於我們對每一個試件進行實驗，將實驗結果繪在一圖表上，以變數 x 為水平軸，量測結果為縱軸。利用最小平方法來描述所有通過的數據點，則這條線的斜率即為要求的敏感係數。

這個方法對於輸入變數 x 與量測結果為線性變化關係是有用的，若兩者的關係為非線性關係時，則這個方法是不適用的。

此外，對於已知函數模式時，其敏感係數可以由數學方式來評估。偏微分係表示固定其它輸入量，微小改變輸入量對被量測量的變化量。我們可以利用下列方式來評估敏感係數：

（1） 力量敏感係數的評估

在固定試件厚度與寬度的條件下，微小的變動給定力量值，觀察拉伸強度的變化量。為了評估力量之敏感係數，我們固定試件的平均厚度與寬度，並採用三個不同大小的力量作用，其中一個力量的選取為比實驗得到的平均力量值大一些，另兩個皆比平均力量值小。觀察三個不同力量作用下，其拉伸強度的變化情形。

就拉伸強度的量測而言，試件的平均厚度為 12.5mm，平均寬度為 49.98mm，及平均破壞力量為 85200N。在這些條件下，我們可以估算出力量的敏感係數：

力量	厚度	寬度	拉伸強度	差異
85100N	12.5mm	49.98mm	136.21N/mm^2	
				0.16N/mm^2
85200N	12.5mm	49.98mm	136.37N/mm^2	
				0.16N/mm^2
85300N	12.5mm	49.98mm	136.53N/mm^2	

由這些計算中，我們可以看出力量在 100N的改變下，會導致拉伸強度產生 0.16 N/mm^{2}的變化，由此可知，其力量的敏感係數為 0.0016 （N/mm^2）/N或 0.0016mm^{-2}。這個結果幾乎等於直接由偏微分方式計算得到的敏感係數一致。

（2） 厚度敏感係數的評估

為了決定厚度敏感係數，我們固定作用力量及試件的寬度，觀察在微小改變試件厚度下。就拉伸強度的量測而言，拉伸強度的變化情形：

力量	厚度	寬度	拉伸強度	差異
85200N	12.49mm	49.98mm	136.48N/mm^2	
				-0.11N/mm^2
85200N	12.50mm	49.98mm	136.37N/mm^2	
				-0.10N/mm^2
85200N	12.51mm	49.98mm	136.27N/mm^2	

假如我們平均這兩個差異值，我們可以看出厚度在 0.01mm改變下，其導致的拉伸強度變化量為-0.105N/mm^2。換言之，厚度的敏感係數為

$$C_T = \frac{-0.105N/mm^2}{0.01mm} = -10.5000N/mm^3 \quad (24)$$

這個評估量與直接利用偏微分方式得到的敏感係數有 4%的差異，這個值已是相當好的情形，但我們可以再考量採用更小的厚度變化量，來觀察其拉伸強度的量測結果：

力量	厚度	寬度	拉伸強度	差異
85200N	12.499mm	49.98mm	136.3855N/mm^2	
				-0.0110N/mm^2
85200N	12.500mm	49.98mm	136.3745N/mm^2	
				-0.0109 N/mm^2
85200N	12.501mm	49.98mm	136.3636N/mm^2	

平均這兩個差異量，我們可以看出厚度在 0.001mm改變下，其導致的拉伸強度變化量為-0.01095N/mm^2。如此我們評估的厚度敏感係數值則為-10.9500N/mm^3，而直接利用偏微分方式求得的敏感係數為-10.9100N/mm^3。由此可知，採用更小的厚度變化量將可改善敏感係數的評估。我們甚至可以再採用更小的厚度變化量來評估，

力量	厚度	寬度	拉伸強度	差異
85200N	12.4999mm	49.98mm	136.37564N/mm^2	-0.00109N/mm^2
85200N	12.5000mm	49.98mm	136.37455N/mm^2	
85200N	12.5001mm	49.98mm	136.37346N/mm^2	-0.00109N/mm^2

如此產生之厚度敏感係數為-10.9000N/mm^3。

（3） 寬度敏感係數的評估

為了評估厚度之敏感係數，我們固定作用力量與試件之厚度，改變試件之寬度，觀察其拉伸強度的量測結果變化情形。

力量	厚度	寬度	拉伸強度	差異
85200N	12.5mm	49.979mm	136.3773N/mm^2	-0.0028N/mm^2
85200N	12.5mm	49.980mm	136.3745N/mm^2	
85200N	12.5mm	49.981mm	136.3718N/mm^2	-0.0027N/mm^2

平均兩個差異量，我們可以看出寬度在 0.001mm改變下，其導致的拉伸強度變化量為-0.00275N/mm^2。因此，厚度的敏感係數為

$$C_W = \frac{-0.00275N/mm^2}{0.001mm} = -2.7500N/mm^3 \qquad (25)$$

這個寬度之敏感係數評估與直接利用偏微分方式求得的值有 1%的差異。

當我們在評估其敏感係數時，需記住下列幾個重要的事情：

(1) 使用微小改變的輸入參數進行敏感係數評估，若採用試件之厚度差異過大時，則得到的厚度敏感係數便會與直接利用偏微分方式求的的值差異更大。

例如，我們分別採用 2.5，12.5 及 22.5mm 厚度的試件進行厚度敏感係數的評估：

力量	厚度	寬度	拉伸強度	差異
85200N	2.5mm	49.98mm	681.87N/mm^2	-545.50N/mm^2
85200N	12.5mm	49.98mm	136.37N/mm^2	
85200N	22.5mm	49.98mm	75.76N/mm^2	-60.61N/mm^2

平均兩個差異量，我們可以看出厚度在 10mm改變下，其導致的拉伸強度變化量

為-3.0306N/mm^2，其敏感係數為-30.3060N/mm^3，這個值幾乎三倍於直接利用偏微分方式求得的值。

因此，輸入量的改變對於被測量的影響程度，將是決定其敏感係數一個非常重要的參數。若輸入量對於被測量的影響程度很小，則採用之輸入量變異大小對敏感係數值的影響亦不大。

例如，改變作用的力量對於拉伸強度量測並不敏感，如分別採用 75200，85200及 95200N的作用力，所獲得的敏感係數大約為 0.0016mm^{-2}。但為了安全起見，我們建議採用小的輸入量變異進行敏感係數評估。

(2) 對於被量測量需維持顯著的評估，如此才能確保檢視出微小的被量測值變化，如同上述的厚度與寬度之敏感係數評估。若獲得的被量測量不夠靈敏，則進行敏感係數評估時，其結果將會有巒大的差異性。

例如，當拉伸強度量測的最小讀值為 0.01N/mm^2，在進行厚度之敏感係數評估：

力量	厚度	寬度	拉伸強度	差異
85200N	12.5mm	49.979mm	136.38N/mm^2	-0.01N/mm^2
85200N	12.5mm	49.980mm	136.37N/mm^2	
85200N	12.5mm	49.981mm	75.37N/mm^2	0N/mm^2

則我們獲得的厚度敏感係數為-5.0000N/mm^3，很清楚可以看出這是一個不合適的評估方式，這個評估方式不適用的原因係由於小的厚度變化量對於拉伸強度的量測結果影響不大，故無法得到一個好的評估結果。

假如模式函數是已知的，幾乎可以很簡單的直接利用偏微分方式求得敏感係數。然而，假如模式函數是一個很複雜的形式時，則必需利用數值近似方式來計算。例如，Brinell 硬度 B 的數學模式定義為作用力 F、壓痕器直徑 D 及壓痕直徑 d 的函數，如下所示

$$B = \frac{0.204F}{\pi D\left(D - \sqrt{D^2 - d^2}\right)} \qquad (26)$$

由於這個模式函數要利用偏微分方式計算 D 及 d 的敏感係數並不容易，且對 B 進行偏微分處理有可能會出錯。因此，利用實驗方式求得各輸入量的敏感係數是一個極為可靠的方法。

7.5 組合分佈

7.5.1 非修正輸入量

一旦所有輸入量的不確定度值u_i與敏感係數c_i被決定後，其組合不確定度可表示為各個輸入量的不確定度平方與其敏感係數平方乘積總和之平方根，如下式

所示

$$u_c = \sqrt{\sum_i c_i^2 u_i^2} \tag{27}$$

換言之，我們可以由組合標準不確定度定出組合變數為

$$u_c^2 = \sum_i c_i^2 u_i^2 \tag{28}$$

7.5.2 修正輸入量

當輸入量彼此是相互關連時，則輸入量的值不再是獨立的。例如，在進行拉伸強度量測時，量測試件之厚度與寬度是相關的，因為這兩個量是利用相同的游標卡尺進行量測的。對於相關的輸入量而言，其組合變數表示如下

$$u_c^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 u_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} c_i c_j u_i u_j r(x_i, x_j) \tag{29}$$

相關係數$r(x_i,x_j)$具有輸入量x_i與x_j相關自由度之特性，假如輸入量為非相關性，則 r 等於 0。對於完全相關的輸入量，其 r 等於±1；相關性自由度為變動時，其 r 在+1 與−1 之間變動。

為了評估相關係數，我們首先必需評估兩個相關輸入量的”協方差”，兩個相關輸入量的平均值之協方差評估可由下式來決定

$$s(\overline{q},\overline{r}) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}(q_k - \overline{q})(r_k - \overline{r}) \tag{30}$$

相關之係數為

$$r(\overline{x}_i,\overline{x}_j) = \frac{s(\overline{x}_i,\overline{x}_j)}{s(\overline{x}_i)s(\overline{x}_j)} \tag{31}$$

其中$s(\overline{x}_i)$與$s(\overline{x}_j)$為輸入量x_i與x_j之實驗標準差。

在本研究中，由於試件的厚度與寬度量測使用相同的游標卡尺進行量測，所以輸入量（試件之厚度與寬度）彼此是相關的，因此我們使用相關輸入量來表示其組合變數：

$$u_c^2 = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u_i^2 + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} c_i c_j u_i u_j r(x_i, x_j) \tag{32}$$

因此，我們必需由厚度、寬度與力量之標準差與平均值來評估相關係數：

$$\overline{T}=12.5mm;\quad \overline{W}=49.98mm;\quad S_T=0.1mm;\quad S_W=0.0837mm$$

$$S(\overline{T},\overline{W})=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(T_i-\overline{T})(W_i-\overline{W})=1.5x10^{-3}mm^2 \tag{33}$$

$$r(\overline{T},\overline{W})=\frac{S(\overline{T},\overline{W})}{S(\overline{T})S(\overline{W})}=\frac{1.5x10^{-3}mm^2}{(0.1mm)(0.0837mm)}=0.179$$

我們可以得到組合變數為

$$u_c^2=C_F u_F^2+C_T u_T^2+C_W u_W^2+2C_T C_W u_T u_W r(\overline{T},\overline{W})$$

$$=(31.2570+1.190273+0.5211613+0.08930621)\frac{N^2}{mm^4} \tag{34}$$

$$=32.5887\frac{N^2}{mm^4}$$

其組合不確定度標準差為

$$u_c=5.71\frac{N}{mm^2} \tag{35}$$

由上可知，雖然我們處理相關的輸入量，但所得到的相關程度很小，忽略其相關性可能是安全的。假如我們忽略其相關性，對於輸入量之不確定度與對應之敏感係數利用簡單的平方根總和，即可獲得組合標準不確定度為

$$u_c=\sqrt{C_F^2u_F^2+C_T^2u_T^2+C_W^2u_W^2}$$

$$=\sqrt{(0.001601)^2(3493)^2+(-10.9100)^2(0.1)^2+(2.7286)^2(0.0837)^2} \tag{36}$$

$$=5.70\frac{N}{mm^2}$$

其與採用相關性輸入量評估方式得到的組合標準不確定度差異為 0.2%，但這並非意味著所有的相關性輸入量皆可採用此方式來簡化，其先決條件為各個輸入量彼此的相關性很小時才成立，否則必需採用相關性輸入量評估模式。

7.5.3 相對組合變數

假如模式函數 f 為

$$f=cx_1^{p_1}x_2^{p_2}\dots x_n^{p_n} \tag{37}$$

且指數p_i已知為正或負的數，且輸入量的不確定度是非相關的，則對應之組合變數可由下式來表示

$$\left[\frac{u_c(y)}{y}\right]^2=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{p_i u(x_i)}{x_i}\right]^2 \tag{38}$$

在本研究中，對於拉伸強度量測的模式函數為

$$S=\frac{F}{TW} \tag{39}$$

它也可以寫成

$$S = FT^{-1}W^{-1} \tag{40}$$

由於我們已知厚度與寬度的量測相關程度是小的，我們可以忽略其相關效應，採用下式來求其相對組合變數與相對標準不確定度：

$$\left[\frac{u_c(S)}{S}\right]^2 = \left[\frac{(1)(3493)}{85200}\right]^2 + \left[\frac{(-1)(0.1)}{12.5}\right]^2 + \left[\frac{(-1)(0.0837)}{49.98}\right]^2 \cong 0.001748;$$

$$\frac{u_c(S)}{S} = \sqrt{0.001748} \cong 0.042 = 4.2\% \tag{41}$$

本研究拉伸強度量測結果的評估為 136.36 N/mm^2，與預估的值差異為 4.5％約 5.70N/mm^2。

7.6 擴充不確定度計算

GUM 不確定度評估方法中，係將輸入量的不確定度予以鑑定與定量化，並以一個標準差來表示這些不確定度。因此組合標準不確定度為一個標準差。就常態分佈情形而言，一個標準差包含著 68％的被量測量可能的值。

儘管在一些商業、工業或管理上的應用，利用組合標準差來表示量測結果的不確定度，但我們經常需要去給定一個量測不確定度可以涵蓋大部分可能量測的結果。因此，藉由增加量測不確定度來涵蓋大部分被量測的期望值，此不確定度稱之為擴充不確定度，以 U 符號來表示。擴充不確定度 U 係由組合不標準差乘上一個擴充係數 k 而獲得，如下式所示

$$U = ku_c(y) \tag{42}$$

7.6.1 擴充係數評估

為了獲得擴充係數 k，需要先評估組合標準差的不確定度。這個不確定度由 $u_c(y)$的有效自由度v_{eff} 來表示，其中v_{eff} 表示對於評估$u_c(y)$時可獲得多少訊息來決定。假如自由度的值高的話，意味著對於評估$u_c(y)$能更有效的獲得。

對於涵蓋 95％被量測量可能的值，通常需要的擴充係數 k 的值介於 2 至 3 之間。對於非常大的v_{eff}值，k 會趨近於 2，這相當於兩個標準差涵蓋近 95％常態分佈。假如有限的資訊對於不確定度評估是有效的，以致於不確定度的評估是大的，這反映出小的自由度與大的 k 值。

計算 k 值的四個步驟程序：

（1） 估計被量測量 y 與組合標準差$u_c(y)$。

（2） 利用 Welch-Satterthwaite 公式估計自由度v_{eff}

$$v_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i^4 u^4(x_i)}{v_i}} \tag{43}$$

這裡的ν_i表示評估x_i不確定度大小的自由度，A 類評估中這個自由度為$\nu = n - 1$，其中 n 為重複量測的次數。假如 n 次獨立量測係由最小平方法的直線片段與斜率來決定時，則它們個別標準不確定度的自由度為$\nu = n - 2$。在一般情形中，由一最小平方法近似 m 個參數獲得 n 個數據點，則每一參數的標準不確定度自由度為$\nu = n - m$。

B 類不確定度評估的自由度計算相當的困難，但 GUM 提出了一個表示式：

$$\nu = \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)}\right]^{-2} \tag{44}$$

對於 B 類的標準不確定度評估是一個基於個人主觀判定的量。

（3） 由 t-分佈表中，對應其自由度ν_{eff}與信賴水準 p 來求得 t-因子。假如ν_{eff}不是一個整數，則選取最接近的整數值。

（4） 利用$k = t_p(\nu_{eff})$關係求得擴充不確定度$U = ku_c(y)$。

在本研究拉伸強度試驗中，組合不確定度u_c為 5.71N/mm^2，力量、厚度與寬度量測的不確定度分別為 3493N、0.1mm、0.0837mm。每一個不確定度的評估是基於 5 次重複量測的結果。因此，A類不確定評估n=5 且自由度$\nu_i = n - 1 = 4$。最後，這些輸入量的敏感係數分別為C_F=0.001601mm^{-2}、C_T=-10.9100N/mm^{3}及C_W=-2.7286N/mm^3。

利用 Welch-Satterthwaite 公式來計算組合標準差的有效自由度：

$$\begin{aligned} v_{eff} &= \frac{u_c^4}{\dfrac{c_F^4 u_F^4}{v_F} + \dfrac{c_T^4 u_T^4}{v_T} + \dfrac{c_w^4 u_w^4}{v_w}} \\ &= \frac{(5.71)^4}{\dfrac{(0.001601)^4(3493)^4}{4} + \dfrac{(-10.9100)^4(0.1)^4}{4} + \dfrac{(-2.7286)^4(0.0837)^4}{4}} \approx 4 \end{aligned} \tag{45}$$

由 t-分佈表中，對應其自由度ν_{eff}與信賴水準 95%得到 t=2.78，
所以拉伸強度結果的擴充不確定度為

$$U = ku_c = (2.78)(5.71N/mm^2) = 15.87N/mm^2 \approx 16.00N/mm^2 \tag{46}$$

7.7 合理性

儘管不確定度評估意味著一個理想的作業，我們可以合理的給定最後拉伸強度結果一個有效的資訊。然而，在汽車零件的設計方面，基於安全性的考量，其設計零件的容許強度往往遠大於作用負荷，所以不確定度的評估在這一方面便顯的意義不大。

然而，這並非意味著在嚴格的量測不確定度評估不重要，在拉伸強度量測中，假如我們採用最初快速近似法評估拉伸強度量測之不確定度，5 個量測結果對應之標準差為 4.828N/mm^2，這個標準差是基於 5 個量測結果的評估，因此對應

出 4 個自由度，再對應t-分佈表，我們可以得到在 95%信賴水準下，擴充係數為k=2.78，將其乘上拉伸強度的標準差，我們很快可以得到其不確定評估量近似 13.00N/mm²，這個量比採用嚴格的不確定評估量 16.00N/mm²小了近 19%。在實際的應用與顧客需求上，這個量測結果可能是可被接受的。由此可知，不確定度的評估結果必需由使用者的量測結果與對應之不確定度評估結果所支配。假如採用快速評估方法是可被接受的，則相對的承擔的風險亦會較大。在這方面的方法選擇，則有賴於使用者本身依據自然法則與它的真實性來判定。

在本研究之拉伸強度試驗中，其合理性的測試是基於比較嚴苛的評估結果、快速的評估結果與實驗的量測結果，並依據這些量測結果判定採用何種方法評估較為合理。

7.8 不確定度報告

在量測不確定度評估報告中，其量測結果的報告至少需包含：

（1） 給出被測量 Y 的完整定義。

（2） 說明量測結果 Y=y±U，給出 y 和 U 及其單位。

（3） 給出獲得 U 時所用的 k 值。

（4） 給出區間 y±U 的信賴機率，並說明如何確定的。

在本研究之拉伸強度量測試驗中，依據ASTM D638 方法進行測試，對於量測結果及其擴充不確定度的數值表達方式，材料的破壞拉伸強度為(136.00±16.00)N/mm²，其中±符號之後的數值即為擴充不確定度$U=ku_c$，U則為組合標準不確定度u_c=5.71N/mm²，使用之擴充係數k=2.78。k是依據自由度ν=4 的t分佈值得到的，定義區間具有 95%信賴水準。

8. 結論

在實際工作中經常會遇到許多使用量測不確定度的問題，對於量測不確定評估方法有下列幾項重點可供參考與應用：

（1） 量測不確定度是表明了對量測結果的不可信程度。這是一個可以定量評定的參數，它不包括或以修正的系統誤差，也不包括異常值。當我們給出量測結果時必須同時給出其量測不確定度，這樣量測結果才是有意義的。

（2） 量測誤差與量測準確度是理想條件下的定義，因此是不可能准確定量確定的。但在定性說明時仍然可以使用這兩個術語。

（3） 對一部份已認識到的系統誤差，可以用實驗或理論的方法估計，並對量測結果進行修正。修正值本身存在不確定度。以修正的量測結果之不確定度包括量測運算平均值的不確定度、修正值的不確定度及被量測定義不完全引入的不確定度之合成。

（4） “精度”在傳統使用中常被混淆，因此建議迴避使用。需要表示量測結果分散性程度時可用重複性及再現性。

（5） 當在檢定證書、校準證書、測試報告、技術報告中給出量測結果的不確定

度時，可以用組合標準不確定度或擴充不確定來表示。通常在基本常數、基本計量研究、計量基準和計量標準的國際比對中，用組合標準不確定度u_c來表示，除上述情況外的其他量測結果中，都用擴充不確定度U來表示。在用擴充不確定度表示時，應說明擴充係數k或信賴水準p，最好同時說明k和p的值，必要時還可說明自由度和組合標準不確定度的大小。

（6） 當確定新研製的計量標準裝置或量測儀器的技術指標時，應進行不確定度分析和綜合，最後說明量程內可達到的量測不確定度。對校準值應給出校準不確定度，並應對所述的不確定度加以說明。

（7） 登提出量測要求或確定一般產品的指標時，可使用”最大允許誤差”或”允許誤差限”。

（8） 應該儘量在不確定度表示方法上與國際接軌。但有些國際標準由於制訂時間較早，其表示量測結果及其不確定度的方法與現行不完全一致，在這些標準修訂之前，允許按照有關標準的要求來公布量測結果，但應加以說明。

參考文獻

1. ANSI/NCSL, Z540-2-1997, “U.S. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement”, 1st ed., October 1997.
2. Eurachem/CITAC, “Quantifying Uncertainty in Analytical Measurement”, 2nd edition, 2000.
3. ILAC-G17:2002 Introducing the Concept of Uncertainty of Measurement in Testing in Association with the Application of the Standard ISO/IEC 17025.
4. ISO/DTS 21748, “Guide to the use of repeatability, reproducibility and trueness estimates in measurement uncertainty estimation”.
5. ISO/IEC 17025:1999, “General requirements for the competence of calibration and testing laboratories”.
6. United Kingdom Accreditation Service, “The Expression of Uncertainty in Testing”, UKAS publication ref: LAB 12, 1st ed., September 2000.
7. 周江文, “誤差理論”, 測繪出版社, 1984.
8. 叶德培, “測量不確定度”, 國防工業出版社, 1995.
9. 徐章, “量測不確定度評估理論與實務”, 財團法人工業技術研究院量測技術發展中心, 2002.

相關網站

1. American National Standards Institute (ANSI): www.ansi.org
2. American Society for Testing and Materials (ASTM): www.astm.org
3. American Society of Mechanical Engineers (ASME): www.asme.org
4. Co-Operation on International Traceability in Analytical Chemistry (CITAC): www.citac.ws

5. Eurachem: www.eurachem.bam.de
6. European cooperation for Laboratory Accreditation (EA): www.european-accreditation.org
7. International Laboratory Accreditation Cooperation (ILAC): www.ilac.org/
8. International Organization for Standardization (ISO): www.iso.ch
9. International vocabulary of basic and general terms in metrology (VIM): www.cornnet.nl/~mlbroens/vim.htm
10. National Conference of Standards Laboratories International (NCSLI, formerly known as NCSL, the National
11. Conference of Standards Laboratories): www.ncslinternational.org
12. National Institute of Standards and Technology (NIST): www.nist.gov
13. NIST-SEMATECH Engineering Statistics Internet Handbook: www.itl.nist.gov/div898/handbook/index.htm
14. Uncertainty Analysis: www.itl.nist.gov/div898/handbook/mpc/section5/mpc5.htm
15. United Kingdom Accreditation Service (UKAS): www.ukas.com